1. Αν η f είναι αναλυτική στο z και $f(z) \neq 0$ δείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η τιμή $|f(z)|$ να μην είναι η ελάχιστη τιμή της $|f(w)|$ για $|w - z| \leq r$. *Υπόδειξη:* Θεωρείστε την $g(z) = 1/f(z)$.

(Αυτή την έχουμε λύσει στο μάθημα.)

2. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $e^{f(z)}$ δείξτε ότι η αρχή μεγίστου ισχύει και για το πραγματικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης f, και φυσικά και για το φανταστικό μέρος: καμία από αυτές τις δύο συναρτήσεις δε μπορεί να έχει τοπικό μέγιστο. Δείξτε ότι δε μπορούν να έχουν ούτε τοπικό ελάχιστο.

(Αυτή την έχουμε λύσει στο μάθημα.)

3. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο δακτύλιο $1 \leq |z| \leq 2$. Υποθέστε επίσης ότι $|f(z)| \leq 3$ για $|z| = 1$ και ότι $|f(z)| \leq 12$ για $|z| = 2$. Δείξτε ότι

$$|f(z)| \leq 3|z|^2, \quad (1 \leq |z| \leq 2).$$

Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f(z)/z^2$ είναι αναλυτική στο δακτύλιο αυτό. Χρησιμοποιήστε την αρχή μεγίστου.

4. Έστω ότι η f είναι αναλυτική πάνω στην απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Υποθέστε ακόμη ότι $|f(z) - 1| < 1$ για κάθε $z \in C$. Δείξτε ότι η f δε μηδενίζεται στο εσωτερικό της καμπύλης C.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(z) = f(z) - 1$ και δείξτε ότι δεν παίρνει την τιμή 1 στο εσωτερικό της C. Χρησιμοποιήστε την αρχή μεγίστου.

5. Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο (και πού λαμβάνονται αυτές οι τιμές) για την $\operatorname{Re} f$ όπου $f(z) = e^z$ στο χωρίο

$$[0, 1] \times [0, \pi].$$

6. Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της απόλυτης τιμής της συνάρτησης $f(z) = (z - 2i)^3$ για $|z| \leq 1$.

7. Υποθέστε ότι η f είναι αναλυτική στο $|z| < 1$ και ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}, \quad (|z| < 1).$$

Δείξτε ότι

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{R^n(1 - R)}, \quad (0 < R < 1).$$

Ποια τιμή πρέπει να επιλέξουμε για το R ώστε να πάρουμε το μικρότερο άνω φράγμα;

8. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $|z| < r$ και ότι εκεί ισχύει $|f(z)| \leq M$. Δείξτε ότι

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!M}{(r - |z|)^n}, \quad (|z| < r).$$

9. Έστω ότι η f είναι ακέραια συνάρτηση και ότι

$$|f(z)| \leq 1 + |z|^5,$$

για όλα τα z με $|z| \geq 1$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού μέχρι 5.

10. Δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού n

$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n,$$

ισχύει

$$p_j = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Για κάθε τέτοιο πολυώνυμο και με $M = \max_{|z|=1} |p(z)|$ δείξτε ότι $|p_j| \leq M$, για $j = 0, 1, \ldots, n$.