

1. Ας είναι C το άνω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$. Βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C e^z dz.$$

Επίσης το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \overline{z^2} dz.$$

2. Δείξτε ότι

$$\left| \oint_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3},$$

όπου C είναι το τόξο από το 2 έως το $2i$ του κύκλου $|z| = 2$. Γράψτε την αντίστοιχη ανισότητα αν C είναι το τόξο του ίδιου κύκλου από το 2 έως το $2e^{i\pi/4}$.

3. Ας είναι f ένα πολυώνυμο βαθμού n :

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε αν $R \geq 1$ να ισχύει

$$\left| \oint_{C_R} f(z) dz \right| \leq CR^{n+1},$$

όπου C_R είναι το ημικύκλιο $|z| = R$, $\text{Im } z > 0$.