

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(a) \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt, \quad (b) \int_0^{\pi/6} e^{2it} dt, \quad (c) \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\forall m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} \overline{e^{int}} dt.$$

3. Βρείτε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε για κανένα $\xi \in [0, 1]$ να μην ισχύει

$$f'(\xi) = f(1) - f(0).$$

Δείχνετε έτσι ότι δεν ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής για συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές.

4. Αν Γ είναι το άνω ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου $\{|z| = 1\}$ (προσανατολισμένο από αριστερά προς δεξιά) υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_{\Gamma} 1 + z^2 dz.$$

5. Αν Γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 1 στο i υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_{\Gamma} e^z dz.$$

6. Αν Γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 1 στο 0 ακολουθούμενο από το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 έως το i βρείτε μια παραμέτρηση της καμπύλης Γ . Έπειτα υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_{\Gamma} z^3 dz.$$