

1. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\left| e^{2z+i} + e^{iz^2} \right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}, \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

2. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\left| e^{z^2} \right| \leq e^{|z|^2}, \quad (z \in \mathbb{C}).$$

3. Ορίζουμε τις συναρτήσεις για $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), & \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \end{aligned}$$

Αποδείξτε

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

Έπειτα δείξτε

$$|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y, \quad |\sinh y| \leq |\cos z| \leq |\cosh y|, \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}).$$

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $e^{\bar{z}}$ δεν είναι πουθενά αναλυτική.