

1. Βρείτε μια τιμή του $\arg z$.

$$z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}, \quad z = \frac{i}{-2 - 2i}, \quad z = (\sqrt{3} - i)^6.$$

2. Χρησιμοποιώντας την πολική μορφή δείξτε ότι

$$(i - 1)^7 = -8(1 + i).$$

3. Βρείτε τις παρακάτω ρίζες σε κατρεσιανές συντεταγμένες και παραστήστε τις γεωμετρικά.

$$(2i)^{1/2}, \quad (-1)^{1/3}, \quad (-16)^{1/4}, \quad 8^{1/6}.$$

4. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του de Moivre για να υπολογίσετε το $\cos 4\theta$ μέσω των $\cos \theta, \sin \theta$.

5. Αν $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ και $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. Έπειτα χρησιμοποιήστε το αυτό για να δείξετε τον τύπο

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\theta}{2 \sin(\theta/2)}, \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

6. Ποια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο περιγράφουν οι παρακάτω παραμετρίσεις;

$$z(t) = 1 + i + \sqrt{2}e^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

$$w(t) = 1 + i + (i - 1)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(t) = it - (1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$s(t) = t + t^2i, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$S(t) = it - t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

7. Βρείτε τα όρια, αν υπάρχουν, των παρακάτω ακολουθιών

$$z_n = \frac{i}{n}, \quad w_n = (-i)^n, \quad u_n = \operatorname{Arg} \left(-1 + \frac{i}{n} \right), \quad v_n = e^{2\pi i n/5}, \quad s_n = \left(\frac{1 - i}{4} \right)^n.$$

8. Αποδείξτε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(z) = \bar{z}$ σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$.

9. Αποδείξτε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(z) = z^2$ σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$.

10. Αποδείξτε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2}$ σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

11. Γράψτε τις παρακάτω συναρτήσεις $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ στη μορφή $u(x, y) + iv(x, y)$, όπου $u, v \in \mathbb{R}, z = x + iy$:

$$f(z) = \frac{z + i}{z^2 + 1}, \quad g(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}.$$

12. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμες

$$z \rightarrow \operatorname{Re} z, \quad z \rightarrow \operatorname{Im} z, \quad z \rightarrow |z|.$$