

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.

1. Αν η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ είναι η σειρά Laurent για $|z| > 1$ δείξτε η σειρά δεν είναι τερματιζόμενη προς το $-\infty$, υπάρχουν δηλ. οσοδήποτε μεγάλα $n > 0$ τέτοια ώστε $a_{-n} \neq 0$.

2. Βρείτε τις ανωμαλίες και τα αντίστοιχα υπόλοιπα για τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(a) \frac{e^3 z}{z-2}, \quad (b) \frac{z+1}{z^2-3z+2}, \quad (c) \frac{\cos z}{z^2}, \quad (d) \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3.$$

3. Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 δείξτε ότι $\text{Res}(f'; z_0) = 0$.

4. Αν η f έχει πόλο τάξης m στο z_0 δείξτε ότι

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) = m.$$

5. Βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω πολυωνύμων στο χωρίο $|z| < 1$.

$$(a) z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z, \quad (b) 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9.$$

6. Βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $2z^5 - 6z^2 + z + 1$ στο χωρίο $1 \leq |z| < 2$.

7. Αν $c \in \mathbb{C}$, $|c| > e$, δείξτε ότι η εξίσωση $cz^n = e^z$ έχει n ρίζες στο χωρίο $|z| < 1$.

8. Υπολογίστε τα παρακάτω καταχρηστικά ολοκληρώματα:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}, \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}, \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1},$$

Παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις είναι όλες άρτιες, άρα $\int_0^{\infty} \dots = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$