

1. Βρείτε μερικούς όρους της σειράς Laurent της συνάρτησης

$$\frac{e^{1/z}}{z^2 - 1},$$

γύρω από το 0, και σε όλους τους διαφορετικούς δακτυλίους όπου αυτή ορίζεται.

2. Βρείτε τη σειρά Laurent της συνάρτησης

$$\frac{z + 1}{z(z - 4)^3}$$

στο δακτύλιο  $0 < |z - 4| < 4$ .

3. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)z^n$$

και σε ποια συνάρτηση συγκλίνει.

4. Βρείτε τη σειρά Taylor της  $\cos z$  γύρω από το 0 παραγωγίζοντας κατά όρους τη σειρά Taylor της  $\sin z$ .

5. Βρείτε τους 3 πρώτους όρους (3 μικρότερες δυνάμεις) της σειράς Laurent της

$$\frac{1}{e^z - 1}$$

γύρω από το 0. Ποιος είναι ο δακτύλιος σύγκλισης;

6. Η  $f$  είναι αναλυτική στο χωρίο  $r < |z - z_0| < R$  και φραγμένη από το  $M$  εκεί. Αν είναι  $a_j, j \in \mathbb{Z}$ , οι συντελεστές της σειράς Laurent της  $f$  στο δακτύλιο αυτό δείξτε τις ανισότητες

$$|a_j| \leq \frac{M}{R^j}, \quad |a_{-j}| \leq Mr^j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

7. Βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{3z^3 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)} dz$$

όπου  $C$  είναι ο κύκλος  $|z| = 4$ . Ομοίως για τον κύκλο  $|z - 2| = 2$ .

8. Αν  $C$  είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος που δεν περνάει από τα σημεία  $0, \pm 1$  πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει το ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{1}{z + 1} + \frac{10}{z} + \frac{100}{z - 1} dz;$$

9. (a) Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής και άρτια και  $C$  είναι ο κύκλος  $|z| = 1$  δείξτε ότι

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

(b) Αν, επιπλέον, η συνάρτηση είναι αναλυτική στο  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  δείξτε το ίδιο αν  $C$  είναι οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη που γυρνάει μια φορά γύρω από το 0.

(c) Βρείτε μια συνεχή άρτια συνάρτηση και μια καμπύλη  $C$  όπως στο (b) τέτοια ώστε

$$\oint_C f(z) dz \neq 0.$$

10. Έστω ότι η  $f$  είναι αναλυτική στο  $z_0$  και έχει μηδενικό εκεί τάξης  $m$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση  $g(z) = f'(z)/f(z)$  έχει απλό πόλο στο  $z_0$  με υπόλοιπο  $m$ .