

1. Αποδείξτε ότι

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

2. Αν $|z| = 2$ ποια η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z^4 + 1|$;

3. Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|.$$

4. Βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$(1 + 2i)z + (3 - i)\bar{z} = 3 + 2i.$$

5. Αν $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, $|w| \leq 1$, δείξτε ότι

$$|z + w| \leq |1 + \bar{z}w|.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

6. Για ποια $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\operatorname{Re} z^2 = 3;$$

7. Για ποια $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\operatorname{Im} z^2 = 3;$$

8. Για ποια $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$2|z| = z + \bar{z} + 4;$$

9. Για ποια $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\operatorname{Re}(z + iz) < 2;$$