Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

Όλες οι καμπύλες είναι θετικά προσανατολισμένες εκτός αν προσδιορίζεται διαφορετικά.
Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
Διάρκεια: 2 ώρες

---

1. Λύστε (με πλήρη αιτιολόγηση) την εξίσωση $\sin(z^2) = 0$ για $z \in \mathbb{C}$.

Λύση: Έστω $x + iy = w = z^2$. Από την $\sin w = 0$ και επειδή $\sin w = \frac{1}{2}(e^{iw} - e^{-iw})$ παίρνουμε την εξίσωση $e^{i2w} = 1$ δηλ. $e^{-2y+i2x} = 1$ που δίνει $y = 0$, $x = k\pi$, για $k \in \mathbb{Z}$. Οι λύσεις της $\sin z^2 = 0$ είναι οι όλες οι τετραγωνικές ρίζες αυτών των αριθμών που είναι οι

$$\pm\sqrt{k\pi}, \quad \pm i\sqrt{k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα $|z + w| \le |z| + |w|$, $z, w \in \mathbb{C}$.

Λύση: Αρκεί να την αποδείξουμε υψωμένη στο τετράγωνο:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z\overline{w} + |w|^2.$$

Αλλά για κάθε μιγαδικό ζ έχουμε $\mathrm{Re}\,\zeta \le |\zeta|$, οπότε η παραπάνω ποσότητα είναι

$$\le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

3. Έστω $a \in \mathbb{C}$, $\theta \in (0, \pi/2)$, $b = e^{i\theta}$ και

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z - a}{b}\right) > 0 \right\}.$$

Περιγράψτε πλήρως το σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$.

Λύση: Έστω $w = \frac{z-a}{b} = e^{-i\theta}(z - a)$. Για να ανήκει το z στο A πρέπει και αρκεί το w να ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο $\mathrm{Im}\, w > 0$. Για ανήκει το $e^{-i\theta}(z - a)$ στο άνω ημιεπίπεδο πρέπει και αρκεί το $z - a$ να ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο *στραμμένο* γύρω από το 0 κατά γωνία θ (αφού ο πολλαπλασιασμός με το $e^{-i\theta}$ στρίβει ένα μιγαδικό αριθμό γύρω από το 0 κατά γωνία $-\theta$). Ας το ονομάσουμε αυτό το στραμμένο ημιεπίπεδο H. Για να ανήκει το $z - a$ στο H πρέπει και αρκεί το z να ανήκει στο $H + a$, δηλ. στο ημιεπίπεδο H *μεταφερμένο* κατά το διάνυσμα a. Αυτό το ημιεπίπεδο είναι το σύνολο A.

4. Αποδείξτε την ταυτότητα:

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.$$

Λύση: Αφού $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ έχουμε

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = e^{i3\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3.$$

Αναπτύσσουμε τον κύβο και κρατάμε το πραγματικό μέρος της παράστασης για να βρούμε το $\cos 3\theta$.

5. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$z\overline{z} + az + \overline{az} + b = 0,$$

με $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}$ ικανοποιείται από τα z που ανήκουν σε ένα κύκλο.

Λύση: Αν προσθέσουμε το $a\overline{a}$ και στα δύο μέρη της εξίσωσης και πάμε το b στο δεξί μέλος η εξίσωση γίνεται

$$|z + \overline{a}|^2 = |a|^2 - b,$$

που είναι κύκλος με κέντρο το $-\overline{a}$ και ακτίνα $\sqrt{|a|^2 - b}$ αν $|a|^2 - b \geq 0$ αλλιώς είναι το κενό σύνολο.

6. Βρείτε τη σειρά Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{2-z}$$

με κέντρο το 1 που ισχύει στο σημείο 3. Να προσδιορίσετε σε ποιο χωρίο συγκλίνει η σειρά αυτή. Μην ασχοληθείτε με το τι γίνεται πάνω στο σύνορο του χωρίου αυτού.

Λύση: Η συνάρτηση έχει μόνο μια ανωμαλία στο 2 άρα με κέντρο το 1 υπάρχουν ακριβώς 2 αναπτύγματα Laurent, στα χωρία $|z-1| < 1$ και $|z-1| > 1$. Ο αριθμός 3 είναι στο δεύτερο χωρίο άρα μιλάμε για το ανάπτυγμα Laurent όταν $|z-1| = 1$. Θέτοντας $w = z - 1$ (άρα $1/|w| < 1$) η συνάρτησή μας γίνεται

$$\frac{1}{1-w} = -\frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{1}{w}} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{w^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{w^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

7. Έστω

$$f(z) = e^{\cos z} z^2.$$

και $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| \leq 2\}$. Δείξτε ότι η $|f|$ πιάνει και το μέγιστο και το ελάχιστό της στο A στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z-5| = 2\}$.

Λύση: Η f είναι ακέραια συνάρτηση άρα από την αρχή μεγίστου πιάνει το μέγιστό της απόλυτής τιμής της και στο σύνορο του χωρίου A (μόνο στο σύνορο αν δεν είναι σταθερή), δηλ. στον κύκλο $|z-5| = 2$.

Στο σύνολο A η f δεν έχει μηδενικά, αφού έχει μόνο ένα μηδενικό σε όλο το $\mathbb{C}$, στο 0, και αυτό δεν είναι μέσα στο A. Άρα ισχύει η αρχή ελαχίστου και η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της και στο σύνορο $|z-5| = 2$.

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{N}{Nz-n}\,dz,$$

όπου $N = 1, 2, 3, \ldots$.

Λύση: Η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε είναι η

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{z - \frac{n}{N}}$$

η οποία έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στα N σημεία

$$\frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{n-1}{N},$$

που όλα ανήκουν στο εσωτερικό της καμπύλης ολοκλήρωσης. Σε κάθε τέτοιο σημείο η συνάρτηση έχει απλό πόλο με υπόλοιπο 1 (αφού γράφεται ως $\frac{1}{z-\frac{n}{N}}$ συν μια συνάρτηση που είναι αναλυτική στη γειτονιά του σημείου n/N. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το άθροισμα των υπολοίπων άρα ισούται με N.

9. Βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης

$$z^7 - 5z^3 + z^2 - 2z$$

στο χωρίο $|z| < 1$.

Λύση: Μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτησή μας ως $f+g$ με $f(z) = -5z^3$ και $g(z) = z^7+z^2-2z$. Για $|z| = 1$ έχουμε $|f(z)| = 5$ ενώ από την τριγωνική ανισότητα $|g(z)| \le 4$. Άρα για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο έχουμε $|f(z)| > |g(z)|$. Από το θεώρημα του Rouché έχουμε ότι οι συναρτήσεις f και $f + g$ (η συνάρτησή μας) έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Η f όμως έχει προφανώς μια τριπλή ρίζα στο 0 και καμία άλλη ρίζα, οπότε και η $f + g$ έχει 3 ρίζες.

10. Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1 + x^4}\, dx.$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα είναι κατ' αρχήν φανερό ότι συγκλίνει γιατί συγκλίνει απόλυτα (επειδή ο εκθέτης του x στον παρανομαστή είναι > 1). Επίσης η συνάρτηση είναι περιττή, άρα το ολοκλήρωμα είναι 0.