Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο Ασκήσεων 8 - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 9 Νοεμβρίου 2026

1. (a) Για $x \geq 0$ δείξτε την ανισότητα (χρήσιμη όταν $x < 1$)

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

Μεταφέρετε όλα τα μέλη στην ίδια πλευρά και θέστε $F(x) = \cos x - 1 + x^2/2$. Παρατηρήστε ότι $F(0) = 0$. Για να δείξετε ότι $F(x) \geq 0$ για $x \geq 0$, αρκεί να δείξετε ότι η F είναι αύξουσα. Υπολογίστε την F' και χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\sin x \leq x$. Αν θέλετε να αποδείξετε και αυτή την ανισότητα, μελετήστε την παράγωγο της $x - \sin x$ και την τιμή της στο 0.

(b) Δείξτε επίσης την ανισότητα, για $x \geq 0$,

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Θέστε $G(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! - \cos x$. Ελέγξτε ότι $G(0) = G'(0) = 0$ και υπολογίστε την G''. Συγκρίνετέ την με τη συνάρτηση F του (a). Χρησιμοποιήστε διαδοχικά τη μονοτονία της G' και της G: πρώτα συμπεράνετε το πρόσημο της G' και έπειτα το πρόσημο της G.

(c) Χρησιμοποιήστε αυτές τις δύο ανισότητες για να υπολογίσετε το $\cos(0.2)$ με ακρίβεια 10^{-4}.

Αντικαταστήστε $x = 0.2$ στα δύο φράγματα. Το $\cos(0.2)$ βρίσκεται ανάμεσα στους δύο αριθμούς που θα προκύψουν. Υπολογίστε τη διαφορά τους, δηλ. το $(0.2)^4/4!$, και συγκρίνετέ την με το 10^{-4}. Πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το σφάλμα αν χρησιμοποιήσετε το κάτω φράγμα ως προσέγγιση;

2. Αποδείξτε ότι για $x > 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Δοκιμάστε επαγωγή ως προς n, ξεκινώντας από το $n = 0$, όπου χρειάζεται μόνο η $e^x \geq 1$ για $x \geq 0$. Για συντομία γράψτε $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$. Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι $e^x - S_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$. Για το επόμενο βήμα εξετάστε τη διαφορά $H(x) = e^x - S_{n+1}(x)$ και παρατηρήστε ότι $H(0) = 0$. Παραγωγίστε το S_{n+1} όρο προς όρο, χρησιμοποιώντας ότι $(x^k/k!)' = x^{k-1}/(k-1)!$ για $k \geq 1$. Ποιο από τα πολυώνυμα S_n προκύπτει; Συνδέστε έτσι το πρόσημο της H' με την επαγωγική υπόθεση και χρησιμοποιήστε τη μονοτονία για να συμπεράνετε το πρόσημο της H.

3. Ένα ανοιχτό χαρτοκιβώτιο έχει τετράγωνη βάση πλευράς x και ύψος y. Από όλα τα χαρτοκιβώτια με σταθερή συνολική επιφάνεια (5 έδρες) ποιο έχει το μέγιστο όγκο;



4. Βρείτε το σημείο της καμπύλης $y = x^2/2$ που είναι πλησιέστερα στο σημείο $(6, 0)$.

5. Από τους κώνους που είναι εγγεγραμμένοι σε σφαίρα ακτίνας 3 ποιος έχει το μέγιστο όγκο;

