Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

Προκαταρκτικά: Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο σε ένα σημείο x_0 αν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0 (επιτρέπεται στο x_0 να είναι άκρο του διαστήματος αυτού) και η παράγωγός της, f', σε αυτό το διάστημα είναι επίσης παραγωγίσιμη στο x_0. Η δεύτερη παράγωγος στο x_0, αν υπάρχει, συμβολίζεται με f'' (αυτό δεν είναι νέος συμβολισμός, απλά ο παλιός εφαρμοσμένος δύο φορές). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παντού δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x) = 2$. Ομοίως ορίζεται και η τρίτη παράγωγος μιας συνάρτησης συνάρτησης σε ένα σημείο, αν υπάρχει, και ανώτερης τάξης παράγωγοι. Αν μια συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη (δηλ. όσες φορές και να την παραγωγίσουμε παίρνουμε πάλι παραγωγίσιμη συνάρτηση) τότε συνήθως την λέμε *ομαλή*. Η συνάρτηση x^2 που αναφέραμε παραπάνω είναι ομαλή αφού από την τρίτη της παράγωγο και μετά όλες οι παράγωγοι είναι 0. Η n-οστής τάξης παράγωγος της f συμβολίζεται με $f^{(n)}$ ή με $\frac{d^n f}{dx^n}$. Με $f^{(0)}$ συμβολίζουμε την ίδια την f.

---

1. Δείξτε με επαγωγή ως προς το n ότι αν $f(x) = x^k$ (το k είναι ένας σταθερός φυσικός αριθμός) τότε αν $n \leq k$ έχουμε $f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$ ενώ αν $n > k$ τότε $f^{(n)}(x) = 0$. Άρα η f είναι ομαλή.

Λύση: Για $n = 0$ ο τύπος δίνει την ίδια τη συνάρτηση, αν το κενό γινόμενο θεωρηθεί ίσο με 1. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n < k$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$f^{(n+1)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{k-n-1}, \tag{1}$$

που είναι ο ζητούμενος τύπος για το $n+1$. Άρα ο τύπος ισχύει μέχρι και το $n = k$, οπότε $f^{(k)}(x) = k!$. Η παράγωγος αυτής της σταθερής συνάρτησης είναι 0, και κάθε επόμενη παράγωγος είναι επίσης 0. Αν $k = 0$, η f είναι εξαρχής σταθερή και το ίδιο συμπέρασμα ισχύει αμέσως. Έτσι υπάρχουν παράγωγοι κάθε τάξης σε κάθε σημείο, δηλ. η f είναι ομαλή.

---

2. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $f'(x)$ υπάρχει για $x > 0$ και

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

τότε η f' υπάρχει παντού.

Λύση: Για $x < 0$ η f είναι σταθερή σε μια περιοχή του x, άρα $f'(x) = 0$. Για $x > 0$ η παράγωγος υπάρχει από την υπόθεση. Απομένει το 0. Επειδή $f(0) = 0$, ο ορισμός της παραγώγου και το δοσμένο όριο δίνουν

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0. \tag{2}$$

Επομένως η f' υπάρχει σε όλο το $\mathbb{R}$.

---

3. Ορίζουμε τη συνάρτηση προσήμου

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2$ είναι παραγωγίσιμη παντού, αλλά δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0. Γενικεύστε το αυτό δείχνοντας ότι η $\operatorname{sgn} x \cdot x^k$ (με $k > 1$ φυσικό αριθμό) έχει $k-1$ παραγώγους παντού αλλά δεν έχει k-τάξης παράγωγο στο 0.

Λύση: Για $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2$ έχουμε $f(x) = x^2$ όταν $x > 0$ και $f(x) = -x^2$ όταν $x < 0$. Στο 0 το πηλίκο διαφορών είναι $\operatorname{sgn} h \cdot h = |h|$, που τείνει στο 0. Άρα $f'(0) = 0$ και, σε όλο το $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2|x|$. Το πηλίκο $(f'(h) - f'(0))/h = 2|h|/h$ είναι 2 για $h > 0$ και -2 για $h < 0$. Επομένως δεν υπάρχει $f''(0)$.

Για τη γενίκευση θέτουμε $g(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^k$. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι για $0 \le j \le k-1$ η $g^{(j)}$ υπάρχει παντού και είναι της μορφής

$$g^{(j)}(x) = C_j \operatorname{sgn} x \cdot x^{k-j}, \tag{3}$$

όπου $C_j > 0$ είναι μια σταθερά. Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε ακριβώς τη σταθερά αυτή. Για $j = 0$ αυτό ισχύει με $C_0 = 1$. Αν ο τύπος ισχύει για $j \le k-2$, στα μη μηδενικά σημεία τον παραγωγίζουμε κανονικά, αφού το πρόσημο είναι τοπικά σταθερό. Παίρνουμε έτσι την ίδια μορφή με εκθέτη $k-j-1$ και μια νέα θετική σταθερά $C_{j+1} = C_j(k-j)$. Στο 0, επειδή $g^{(j)}(0) = 0$, έχουμε

$$\left| \frac{g^{(j)}(h) - g^{(j)}(0)}{h} \right| = C_j |h|^{k-j-1} \longrightarrow 0, \tag{4}$$

επειδή $k-j-1 \ge 1$. Άρα υπάρχει η επόμενη παράγωγος και έχει τιμή 0 στο 0, όπως απαιτεί και ο τύπος. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή. Τέλος, $g^{(k-1)}(x) = C_{k-1}|x|$, οπότε το πηλίκο διαφορών της στο 0 έχει δεξιό όριο C_{k-1} και αριστερό όριο $-C_{k-1}$. Επειδή $C_{k-1} > 0$, τα δύο όρια είναι διαφορετικά και η $g^{(k)}(0)$ δεν υπάρχει.

---

4. Ας είναι

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ e^{-1/x} & x > 0. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι για κάθε $x \neq 0$ η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Με επαγωγή ως προς $n = 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι αν $x > 0$ τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ τέτοιο ώστε

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}.$$

Χρησιμοποιήστε το αυτό για να δείξετε ότι η $f^{(n)}(0)$ υπάρχει για κάθε $n \ge 1$.

Λύση: Για $x > 0$ έχουμε $f'(x) = x^{-2}e^{-1/x}$, άρα μπορούμε να πάρουμε $P_1(u) = u^2$. Αν $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$, ο κανόνας του γινομένου και ο κανόνας της αλυσίδας δίνουν

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2}\big(P_n(1/x) - P_n'(1/x)\big)e^{-1/x}. \tag{5}$$

Επομένως αρκεί να ορίσουμε $P_{n+1}(u) = u^2(P_n(u) - P_n'(u))$, που είναι πάλι πολυώνυμο. Έτσι αποδείχθηκε ο ζητούμενος τύπος με επαγωγή.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι για κάθε πολυώνυμο Q ισχύει

$$\lim_{u \to +\infty} Q(u)e^{-u} = 0. \tag{6}$$

Πράγματι, για κάθε ακέραιο $m \ge 0$ και $u > 0$ έχουμε $e^u \ge u^{m+1}/(m+1)!$, από το ανάπτυγμα της εκθετικής σε σειρά με θετικούς όρους. Άρα $0 \le u^m e^{-u} \le (m+1)!/u \to 0$. Εφαρμόζοντας αυτό σε κάθε όρο του Q προκύπτει το συμπέρασμα.

Τώρα αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι όλες οι παράγωγοι στο 0 υπάρχουν και είναι 0. Θέτουμε και $P_0(u) = 1$, ώστε ο παραπάνω τύπος να ισχύει για $n = 0$ και $x > 0$. Έστω ότι η $f^{(n)}$ υπάρχει παντού, είναι 0 για $x \le 0$ και δίνεται από τον παραπάνω τύπο για $x > 0$. Αυτό ισχύει για $n = 0$ από τον ορισμό της f. Για $h > 0$, θέτοντας $u = 1/h$, βρίσκουμε

$$\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \frac{1}{h}P_n(1/h)e^{-1/h} = uP_n(u)e^{-u} \longrightarrow 0. \tag{7}$$

Για $h < 0$ το ίδιο πηλίκο είναι 0. Άρα $f^{(n+1)}(0) = 0$. Στα θετικά σημεία η επόμενη παράγωγος δίνεται από την αναδρομή των πολυωνύμων, ενώ στα αρνητικά είναι 0. Η επαγωγή ολοκληρώνεται: η f είναι ομαλή και $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \ge 1$.

5. Δείξτε ότι αν $a < b$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε υπάρχει **ομαλή** συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι 0 εκτός του διαστήματος (a, b) και αυστηρά θετική μέσα στο διάστημα (a, b).

Λύση: Έστω φ η ομαλή συνάρτηση της προηγούμενης άσκησης, δηλ. $\varphi(t) = 0$ για $t \leq 0$ και $\varphi(t) = e^{-1/t}$ για $t > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \varphi(x - a)\varphi(b - x). \tag{8}$$

Οι συναρτήσεις $x \mapsto x - a$ και $x \mapsto b - x$ είναι ομαλές. Οι συνθέσεις τους με την φ, και κατόπιν το γινόμενό τους, είναι ομαλές, από τους κανόνες της αλυσίδας και του γινομένου εφαρμοσμένους επανειλημμένα. Αν $x \leq a$, ο πρώτος παράγοντας είναι 0, ενώ αν $x \geq b$, ο δεύτερος είναι 0. Αν $a < x < b$, και οι δύο παράγοντες είναι αυστηρά θετικοί, άρα $f(x) > 0$. Έτσι η f έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες, και στα άκρα a, b είναι επίσης ομαλή.