Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο Ασκήσεων 7 - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 26 Οκτωβρίου 2026

Προκαταρκτικά: Λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο σε ένα σημείο x_0 αν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0 (επιτρέπεται στο x_0 να είναι άκρο του διαστήματος αυτού) και η παράγωγός της, f', σε αυτό το διάστημα είναι επίσης παραγωγίσιμη στο x_0. Η δεύτερη παράγωγος στο x_0, αν υπάρχει, συμβολίζεται με f'' (αυτό δεν είναι νέος συμβολισμός, απλά ο παλιός εφαρμοσμένος δύο φορές). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παντού δύο φορές παραγωγίσιμη και $f''(x) = 2$. Ομοίως ορίζεται και η τρίτη παράγωγος μιας συνάρτησης συνάρτησης σε ένα σημείο, αν υπάρχει, και ανώτερης τάξης παράγωγοι. Αν μια συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη (δηλ. όσες φορές και να την παραγωγίσουμε παίρνουμε πάλι παραγωγίσιμη συνάρτηση) τότε συνήθως την λέμε *ομαλή*. Η συνάρτηση x^2 που αναφέραμε παραπάνω είναι ομαλή αφού από την τρίτη της παράγωγο και μετά όλες οι παράγωγοι είναι 0. Η n-οστής τάξης παράγωγος της f συμβολίζεται με $f^{(n)}$ ή με $\frac{d^n f}{dx^n}$. Με $f^{(0)}$ συμβολίζουμε την ίδια την f.

1. Δείξτε με επαγωγή ως προς το n ότι αν $f(x) = x^k$ (το k είναι ένας σταθερός φυσικός αριθμός) τότε αν $n \leq k$ έχουμε $f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$ ενώ αν $n > k$ τότε $f^{(n)}(x) = 0$. Άρα η f είναι ομαλή.

2. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $f'(x)$ υπάρχει για $x > 0$ και

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

τότε η f' υπάρχει παντού.

3. Ορίζουμε τη συνάρτηση προσήμου

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2$ είναι παραγωγίσιμη παντού, αλλά δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0. Γενικεύστε το αυτό δείχνοντας ότι η $\operatorname{sgn} x \cdot x^k$ (με $k > 1$ φυσικό αριθμό) έχει $k-1$ παραγώγους παντού αλλά δεν έχει k-τάξης παράγωγο στο 0.

4. Ας είναι

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ e^{-1/x} & x > 0. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι για κάθε $x \neq 0$ η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.
Με επαγωγή ως προς $n = 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι αν $x > 0$ τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ τέτοιο ώστε

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}.$$

Χρησιμοποιήστε το αυτό για να δείξετε ότι η $f^{(n)}(0)$ υπάρχει για κάθε $n \geq 1$.

5. Δείξτε ότι αν $a < b$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε υπάρχει **ομαλή** συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι 0 εκτός του διαστήματος (a, b) και αυστηρά θετική μέσα στο διάστημα (a, b).