Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο Ασκήσεων **6** - Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις των ασκήσεων

Σκοπός των ασκήσεων είναι να μετατρέπουμε μια περιγραφή σε σχέσεις ανάμεσα σε μεταβαλλόμενα μεγέθη. Σε κάθε άσκηση:

(1) Ονομάστε τα μεγέθη, γράψτε τις μονάδες τους και ξεχωρίστε ποια μεταβάλλονται και ποια μένουν σταθερά.
(2) Περιγράψτε από ποιο μέγεθος εξαρτάται το καθένα. Στα γεωμετρικά προβλήματα κάντε ένα απλό σχήμα.
(3) Γράψτε τη σχέση που ισχύει καθώς τα μεγέθη μεταβάλλονται. Παραγωγίστε πρώτα και μετά αντικαταστήστε τις τιμές της συγκεκριμένης στιγμής.
(4) Ερμηνεύστε το πρόσημο και τις μονάδες του αποτελέσματος.

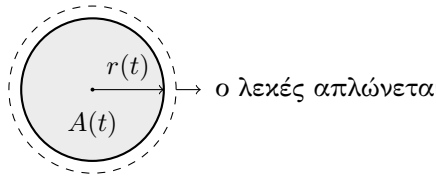
Θεωρούμε ότι οι μεταβολές είναι παραγωγίσιμες. Δεν χρειάζεται να βρείτε τους τύπους όλων των μεγεθών ως συναρτήσεων του χρόνου. Οι αριθμοί δίνονται ώστε οι υπολογισμοί να είναι απλοί.

Γενικα

Στις πρώτες ασκήσεις γράφουμε ένα μέγεθος ως συνάρτηση ενός άλλου, το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από τον χρόνο. Στις επόμενες ξεκινάμε από μια εξίσωση που ισχύει σε κάθε στιγμή και την παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο. Κάθε φορά που παραγωγίζουμε, για παράδειγμα, το $x(t)^2$, χρησιμοποιούμε πάλι τον κανόνα της αλυσίδας. Η πεπλεγμένη παραγώγιση δεν είναι διαφορετικός κανόνας παραγώγισης: μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τους γνωστούς κανόνες χωρίς να έχουμε λύσει πρώτα την εξίσωση ως προς ένα από τα μεγέθη.

---

1. Ένας κυκλικός λεκές μεγαλώνει. Ένας λεκές πάνω σε οριζόντια επιφάνεια παραμένει κυκλικός καθώς απλώνεται. Κάποια στιγμή η ακτίνα του είναι 3 cm και αυξάνεται με ρυθμό 0,2 cm/s.



(1) Ονομάστε την ακτίνα και το εμβαδό και γράψτε πώς συνδέονται. Ποιο από αυτά εξαρτάται από το άλλο και πώς εμφανίζεται ο χρόνος;
(2) Βρείτε τον ρυθμό αύξησης του εμβαδού εκείνη τη στιγμή.
(3) Αν σε μια άλλη στιγμή η ακτίνα είναι 6 cm και ο ρυθμός αύξησής της παραμένει 0,2 cm/s, είναι ίδιος ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού; Εξηγήστε και γεωμετρικά.

Λύση: Γράφουμε $r(t)$ για την ακτίνα σε cm και $A(t)$ για το εμβαδό σε cm^2, με t σε s. Η ακτίνα μεταβάλλεται με τον χρόνο και το εμβαδό καθορίζεται από την ακτίνα: $A(t) = \pi[r(t)]^2$. Ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}. \tag{1}$$

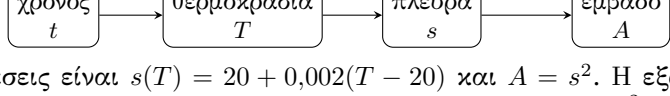
Στη δοσμένη στιγμή βρίσκουμε $dA/dt = 2\pi \cdot 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}2\pi$ cm^2/s. Για $r = 6$ ο ρυθμός είναι $2{,}4\pi$ cm^2/s, δηλ. διπλάσιος. Μια μικρή αύξηση της ακτίνας προσθέτει έναν λεπτό δακτύλιο. Όσο μεγαλύτερη είναι η περιφέρεια, τόσο μεγαλύτερο εμβαδό προστίθεται για την ίδια μικρή αύξηση της ακτίνας. Προσέξτε τη διαφορά: το $dA/dr = 2\pi r$ μετρά μεταβολή εμβαδού ανά cm ακτίνας, ενώ το dA/dt μετρά μεταβολή εμβαδού ανά δευτερόλεπτο.

---

2. Μια πλάκα θερμαίνεται. Μια λεπτή μεταλλική πλάκα παραμένει τετράγωνη καθώς θερμαίνεται. Σε θερμοκρασία $20\,^\circ\text{C}$ η πλευρά της είναι 20 cm. Στο εύρος θερμοκρασιών που εξετάζουμε, κάθε αύξηση της θερμοκρασίας κατά έναν βαθμό αυξάνει την πλευρά κατά $0{,}002$ cm. Τη στιγμή που η θερμοκρασία είναι $20\,^\circ\text{C}$, αυτή αυξάνεται με ρυθμό $5\,^\circ\text{C}/\text{min}$.

(1) Γράψτε τη σχέση της πλευράς με τη θερμοκρασία και τη σχέση του εμβαδού με την πλευρά. Βάλτε σε σειρά τα μεγέθη: χρόνος, θερμοκρασία, πλευρά, εμβαδό.
(2) Με ποιο ρυθμό αυξάνονται η πλευρά και το εμβαδό εκείνη τη στιγμή;
(3) Γιατί ο αριθμός $0{,}002$ δεν είναι ο ρυθμός αύξησης της πλευράς ανά λεπτό;

Λύση: Έστω T η θερμοκρασία σε °C, s η πλευρά σε cm και A το εμβαδό σε cm^2.



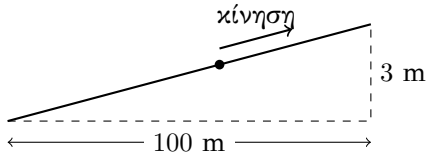
Οι σχέσεις είναι $s(T) = 20 + 0{,}002(T - 20)$ και $A = s^2$. Η εξάρτηση είναι: $T = T(t)$, έπειτα $s = s(T(t))$, και τέλος $A = [s(T(t))]^2$. Άρα

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dT}\frac{dT}{dt} = 0{,}002 \cdot 5 = 0{,}01, \qquad \frac{dA}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}01 = 0{,}4. \tag{2}$$

Η πλευρά αυξάνεται κατά $0{,}01$ cm/min και το εμβαδό κατά $0{,}4$ cm^2/min. Το $0{,}002$ έχει μονάδες $\text{cm}/^\circ\text{C}$ και εκφράζει την αλλαγή της πλευράς ως προς τη θερμοκρασία. Για να περάσουμε σε αλλαγή ως προς τον χρόνο χρειάζεται και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας.

---

3. Ένα όχημα ανεβαίνει έναν δρόμο. Ένα όχημα κινείται σε ανηφορικό δρόμο. Συμβολίζουμε με x την οριζόντια απόστασή του από ένα σταθερό σημείο και με h το υψόμετρό του, και τα δύο σε μέτρα. Κοντά στη θέση όπου βρίσκεται τώρα, ο δρόμος έχει σταθερή κλίση: για κάθε 100 μέτρα αύξησης της οριζόντιας απόστασης, το υψόμετρο αυξάνεται κατά 3 μέτρα. Εκείνη τη στιγμή η οριζόντια απόσταση αυξάνεται με ρυθμό 4 m/s.



Τοπική κλίση του δρόμου (όχι υπό κλίμακα).

(1) Ποια παράγωγο περιγράφει η κλίση του δρόμου και ποια η πληροφορία 4 m/s;
(2) Με ποιο ρυθμό αυξάνεται το υψόμετρο; Χρειάζεται να γνωρίζετε το ίδιο το υψόμετρο εκείνη τη στιγμή;
(3) Αν το όχημα επιστρέφει στην ίδια θέση με την οριζόντια απόσταση να μειώνεται κατά 4 m/s, τι αλλάζει;

Λύση: Το σχήμα του δρόμου ορίζει το υψόμετρο ως συνάρτηση $h = H(x)$ της οριζόντιας θέσης. Η κίνηση ορίζει $x = x(t)$, άρα το υψόμετρο του οχήματος είναι $H(x(t))$. Η κλίση είναι $H'(x) = 3/100$ στη συγκεκριμένη περιοχή, ενώ $dx/dt = 4$ m/s. Επομένως

$$\frac{dh}{dt} = H'(x(t))\frac{dx}{dt} = \frac{3}{100} \cdot 4 = 0{,}12 \text{ m/s}. \tag{3}$$

Δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την τιμή του h ούτε μια αρχική θέση του οχήματος: αρκούν η τοπική κλίση και ο στιγμιαίος οριζόντιος ρυθμός. Στην επιστροφή $dx/dt = -4$, άρα $dh/dt = -0{,}12$ m/s. Η κλίση του δρόμου ως προς το x δεν αλλάζει· αλλάζει η φορά της κίνησης.

---

4. Από τη στάθμη του νερού στην ένδειξη ενός αισθητήρα. Ένας αισθητήρας στον πυθμένα μιας δεξαμενής μετρά πίεση και τη μετατρέπει σε ηλεκτρική τάση. Για το μοντέλο της άσκησης, κάθε αύξηση της στάθμης κατά 1 cm αυξάνει την πίεση στον αισθητήρα κατά 0,1 kPa. Κάθε αύξηση της πίεσης κατά 1 kPa αυξάνει την τάση εξόδου κατά 0,2 V. Κάποια στιγμή η στάθμη ανεβαίνει με ρυθμό 3 cm/min.

(1) Ποιο μέγεθος μεσολαβεί ανάμεσα στη στάθμη και στην τάση; Γράψτε την εξάρτηση της τάσης από τον χρόνο ως σύνθεση συναρτήσεων.
(2) Με ποιο ρυθμό αυξάνονται η πίεση και η τάση εξόδου;
(3) Αν η τάση εξόδου μειώνεται με ρυθμό 0,04 V/min, με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η στάθμη;

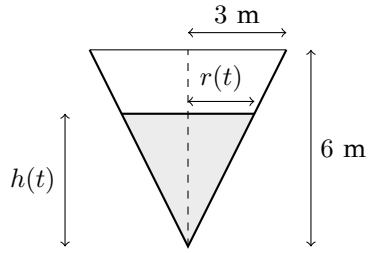
Λύση: Έστω $h(t)$ η στάθμη σε cm, $p = P(h)$ η πίεση σε kPa και $U = S(p)$ η τάση σε V. Τότε $U(t) = S(P(h(t)))$. Από τα δεδομένα $P'(h) = 0{,}1$ kPa/cm και $S'(p) = 0{,}2$ V/kPa. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}1 \cdot 3 = 0{,}3 \text{ kPa/min}, \qquad \frac{dU}{dt} = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 3 = 0{,}06 \text{ V/min}. \tag{4}$$

Για το τελευταίο ερώτημα, $dU/dt = -0{,}04$ και $-0{,}04 = 0{,}2 \cdot 0{,}1\, dh/dt$, άρα $dh/dt = -2$ cm/min. Οι μονάδες στο γινόμενο είναι (V/kPa)(kPa/cm)(cm/min) = V/min. Δεν χρειάζονται οι αρχικές τιμές της πίεσης ή της τάσης, επειδή δίνονται οι σχετικοί ρυθμοί μεταβολής τους.

---

5. Γεμίζοντας ένα κωνικό δοχείο. Ένα δοχείο έχει σχήμα ορθού κυκλικού κώνου, με την κορυφή προς τα κάτω, ύψος 6 m και ακτίνα ανοίγματος 3 m. Νερό εισέρχεται με σταθερό ρυθμό $0{,}3\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, χωρίς διαρροές.



Κατακόρυφη τομή από τον άξονα.

(1) Ονομάστε το βάθος του νερού και την ακτίνα της κυκλικής επιφάνειάς του. Από την ομοιότητα τριγώνων βρείτε τη σχέση τους.
(2) Γράψτε τον όγκο του νερού ως συνάρτηση μόνο του βάθους. Με ποιο ρυθμό ανεβαίνει η στάθμη όταν το βάθος είναι 2 m;
(3) Όταν το βάθος γίνει 4 m, θα ανεβαίνει η στάθμη με τον ίδιο ρυθμό; Εξηγήστε γιατί ο σταθερός ρυθμός εισροής δεν συνεπάγεται σταθερό ρυθμό ανόδου της στάθμης.

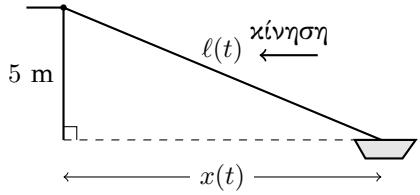
Λύση: Έστω $h(t)$ το βάθος από την κορυφή, $r(t)$ η ακτίνα της επιφάνειας και $V(t)$ ο όγκος. Τα 6 m και 3 m είναι σταθερές διαστάσεις του δοχείου· τα h, r μεταβάλλονται. Η ομοιότητα δίνει $r/h = 3/6$, άρα $r = h/2$. Από τον τύπο του όγκου του κώνου προκύπτει

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{12}h^3, \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}. \tag{5}$$

Για $h = 2$ και $dV/dt = 0{,}3$ βρίσκουμε $dh/dt = 0{,}3/\pi$ m/min. Για $h = 4$ βρίσκουμε $dh/dt = 0{,}3/(4\pi)$ m/min, δηλ. το ένα τέταρτο του προηγούμενου ρυθμού. Όσο ανεβαίνει το νερό, μεγαλώνει η οριζόντια διατομή του. Η ίδια ποσότητα νερού ανά λεπτό μοιράζεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια και η στάθμη ανεβαίνει πιο αργά. Δεν επιτρέπεται να θεωρήσουμε σταθερή την ακτίνα r κατά την παραγώγιση.

---

6. Μια βάρκα πλησιάζει στην αποβάθρα. Ένα τεντωμένο σχοινί συνδέει μια βάρκα με έναν κρίκο που βρίσκεται 5 m ψηλότερα από το σημείο πρόσδεσης στη βάρκα. Το ύψος αυτό παραμένει σταθερό. Η βάρκα κινείται οριζόντια προς το σημείο ακριβώς κάτω από τον κρίκο. Το ελεύθερο τμήμα του σχοινιού μικραίνει με ρυθμό 0,5 m/s.



(1) Γράψτε μια εξίσωση που συνδέει την οριζόντια απόσταση της βάρκας από τον κρίκο με το μήκος του ελεύθερου σχοινιού.

(2) Παραγωγίστε την εξίσωση ως προς τον χρόνο, χωρίς να λύσετε πρώτα ως προς την οριζόντια απόσταση. Πόσο γρήγορα πλησιάζει η βάρκα όταν η οριζόντια απόσταση είναι 12 m;
(3) Γιατί η ταχύτητα προσέγγισης δεν είναι απλώς 0,5 m/s;

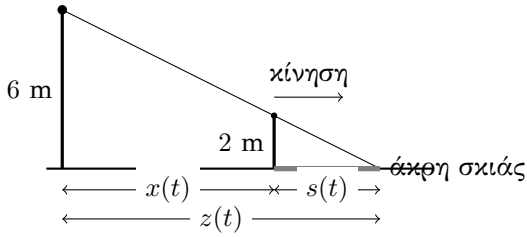
Λύση: Έστω $x(t) > 0$ η οριζόντια απόσταση και $\ell(t)$ το ελεύθερο μήκος του σχοινιού, σε m. Το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει $x^2 + 25 = \ell^2$. Παραγωγίζοντας όλα τα μεταβαλλόμενα μεγέθη ως προς t παίρνουμε

$$2x\frac{dx}{dt} = 2\ell\frac{d\ell}{dt}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\ell}{x}\frac{d\ell}{dt}. \tag{6}$$

Όταν $x = 12$, έχουμε $\ell = 13$ και $d\ell/dt = -1/2$. Άρα $dx/dt = -13/24$ m/s: η βάρκα πλησιάζει με ταχύτητα $13/24$ m/s. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η απόσταση μειώνεται. Η μεταβολή της υποτείνουσας δεν είναι ίση με τη μεταβολή της οριζόντιας πλευράς. Αν θεωρήσουμε το x ως συνάρτηση του ℓ, τότε $dx/d\ell = \ell/x$ και η τελευταία ισότητα είναι πάλι εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας.

---

7. Ο πεζός και η σκιά του. Ένας κατακόρυφος στύλος έχει ύψος 6 m και μια σημειακή λάμπα στην κορυφή του. Ένας πεζός ύψους 2 m απομακρύνεται από τον στύλο πάνω σε οριζόντιο έδαφος, σε ευθεία, με ταχύτητα 1,5 m/s.



(1) Ονομάστε την απόσταση του πεζού από τον στύλο, το μήκος της σκιάς του και την απόσταση της άκρης της σκιάς από τον στύλο. Ποια σχέση συνδέει αυτά τα τρία μήκη;
(2) Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα, βρείτε μια δεύτερη σχέση και υπολογίστε τον ρυθμό αύξησης του μήκους της σκιάς.
(3) Με ποια ταχύτητα κινείται η άκρη της σκιάς ως προς το έδαφος; Γιατί δεν είναι η ίδια με τον ρυθμό του προηγούμενου ερωτήματος;

Λύση: Έστω $x(t)$ η απόσταση του πεζού από τον στύλο, $s(t)$ το μήκος της σκιάς και $z(t)$ η απόσταση της άκρης της σκιάς από τον στύλο. Έχουμε $z = x + s$. Από τα όμοια τρίγωνα, $6/z = 2/s$, δηλ. $z = 3s$. Έτσι $x = 2s$, και παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = 0{,}75 \text{ m/s}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dt} = 2{,}25 \text{ m/s}. \tag{7}$$

Το s μετριέται από τα πόδια του πεζού, τα οποία κινούνται, ενώ το z από τη σταθερή βάση του στύλου. Άρα το μήκος της σκιάς και η θέση της άκρης της δεν είναι το ίδιο μεταβαλλόμενο μέγεθος. Οι σταθερές ποσότητες είναι τα δύο ύψη, όχι οι οριζόντιες αποστάσεις.

---

8. Ένα ορθογώνιο αλλάζει σχήμα. Ένα ορθογώνιο μεταβάλλει τις πλευρές του, αλλά το εμβαδό του παραμένει 24 m^2. Κάποια στιγμή η μία πλευρά είναι 4 m και μικραίνει με ρυθμό 0,1 m/s.

(1) Πόσο είναι τότε η άλλη πλευρά; Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται;
(2) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η περίμετρος; Μπορεί να μεταβάλλεται η περίμετρος ενώ το εμβαδό μένει σταθερό;
(3) Θεωρήστε τη δεύτερη πλευρά ως συνάρτηση της πρώτης. Ποια είναι η παράγωγός της ως προς την πρώτη πλευρά στη δοσμένη θέση; Πώς συνδέεται με την παράγωγο ως προς τον χρόνο;

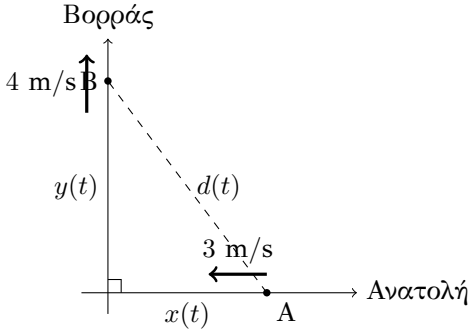
Λύση: Έστω $x(t)$ η πλευρά που μικραίνει και $y(t)$ η άλλη πλευρά. Η σταθερότητα του εμβαδού δίνει $xy = 24$. Όταν $x = 4$, έχουμε $y = 6$ και $x' = -0{,}1$ m/s. Παραγωγίζοντας το γινόμενο, $x'y + xy' = 0$, οπότε $y' = -(y/x)x' = 0{,}15$ m/s. Η περίμετρος είναι $P = 2x + 2y$, άρα $P' = 2(-0{,}1) + 2(0{,}15) = 0{,}1$ m/s: αυξάνεται. Για την παράγωγο ως προς την πλευρά x, παραγωγίζουμε τη σχέση $x\,y(x) = 24$:

$$(8)\quad y + x\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{3}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 0{,}15 \text{ m/s}.$$

Το dy/dx είναι αρνητικό, αλλά το dy/dt θετικό, επειδή το ίδιο το x μειώνεται. Το σταθερό εμβαδό επιβάλλει μια σχέση ανάμεσα στις πλευρές, χωρίς να τις κάνει σταθερές.

---

9. Δύο ποδηλάτες σε κάθετους δρόμους. Δύο ευθείς, κάθετοι δρόμοι τέμνονται σε μια πλατεία. Κάποια στιγμή ο πρώτος ποδηλάτης βρίσκεται 6 m ανατολικά της πλατείας και κινείται προς αυτήν με ταχύτητα 3 m/s. Ο δεύτερος βρίσκεται 8 m βόρεια της πλατείας και απομακρύνεται προς τον βορρά με ταχύτητα 4 m/s.



(1) Ονομάστε τις δύο αποστάσεις από την πλατεία και την ευθύγραμμη απόσταση μεταξύ των ποδηλατών. Γράψτε τη γεωμετρική σχέση τους.
(2) Εκείνη τη στιγμή οι ποδηλάτες πλησιάζουν ο ένας τον άλλο ή απομακρύνονται; Με ποιο ρυθμό;
(3) Αρκεί η παρατήρηση ότι ο πρώτος πλησιάζει στην πλατεία για να απαντήσουμε; Γιατί πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις δύο κινήσεις στην παραγώγιση;

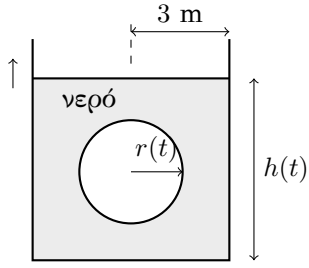
Λύση: Έστω $x(t)$ η απόσταση του πρώτου από την πλατεία, $y(t)$ του δεύτερου και $d(t)$ η μεταξύ τους απόσταση. Κοντά στη δοσμένη στιγμή οι δύο αποστάσεις από την πλατεία είναι θετικές, με $x' = -3$ και $y' = 4$. Έχουμε $d^2 = x^2 + y^2$, άρα

$$2dd' = 2xx' + 2yy', \qquad d' = \frac{xx' + yy'}{d} = \frac{6(-3) + 8 \cdot 4}{10} = 1{,}4 \text{ m/s}. \tag{9}$$

Οι ποδηλάτες απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο. Η απόσταση d εξαρτάται από δύο μήκη που μεταβάλλονται συγχρόνως. Στη σχέση για το d^2, η κίνηση του πρώτου συνεισφέρει αρνητικά και του δεύτερου θετικά· εδώ η δεύτερη επίδραση είναι μεγαλύτερη. Δεν είναι σωστό να κρατήσουμε το y σταθερό ούτε να αφαιρέσουμε απλώς τα μέτρα των δύο ταχυτήτων.

---

10. Ένα μπαλόνι ανεβάζει τη στάθμη. Μια ψηλή κυλινδρική δεξαμενή με κατακόρυφα τοιχώματα έχει εσωτερική ακτίνα 3 m και περιέχει νερό. Ένα σφαιρικό μπαλόνι μέσα της φουσκώνει, παραμένοντας ολόκληρο κάτω από την επιφάνεια του νερού και χωρίς να ακουμπά στα τοιχώματα. Δεν μπαίνει ούτε βγαίνει νερό, και η δεξαμενή δεν ξεχειλίζει. Τη στιγμή που η ακτίνα του μπαλονιού είναι 1 m, αυτή αυξάνεται με ρυθμό 0,09 m/min.



Κατακόρυφη τομή από τον άξονα.

(1) Ποιος όγκος παραμένει σταθερός; Γράψτε μια εξίσωση που να συνδέει τη στάθμη του νερού, την ακτίνα του μπαλονιού και τον σταθερό όγκο του νερού.
(2) Με ποιο ρυθμό ανεβαίνει η στάθμη εκείνη τη στιγμή;
(3) Αν αργότερα η ακτίνα γίνει 2 m και αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό, πόσες φορές μεγαλύτερος θα είναι ο ρυθμός ανόδου της στάθμης; Υποθέστε ότι εξακολουθούν να ισχύουν όλες οι γεωμετρικές συνθήκες της εκφώνησης.

Λύση: Έστω $h(t)$ η στάθμη από τον πυθμένα, $r(t)$ η ακτίνα του μπαλονιού και W ο σταθερός όγκος του νερού. Ο όγκος του κυλίνδρου μέχρι τη στάθμη περιέχει τόσο το νερό όσο και ολόκληρο το μπαλόνι. Επομένως

$$9\pi h = W + \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{10}$$

Ο όγκος $9\pi h$ δεν είναι σταθερός. Σταθερό είναι το W, γι' αυτό η παραγώγιση δίνει

$$9\pi h' = 4\pi r^2 r', \qquad h' = \frac{4}{9} r^2 r'. \tag{11}$$

Για $r = 1$ και $r' = 0{,}09$ παίρνουμε $h' = 0{,}04$ m/min. Για $r = 2$ και τον ίδιο ρυθμό r' παίρνουμε $h' = 0{,}16$ m/min, δηλ. τετραπλάσιο ρυθμό. Η εξάρτηση της στάθμης από την ακτίνα προκύπτει από τη διατήρηση του όγκου του νερού. Η αύξηση της ακτίνας προκαλεί αύξηση του όγκου του μπαλονιού και αυτός εκτοπίζει νερό προς τα πάνω.