Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής στο 0, όπως και αν την ορίσουμε στο 0.

(b) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.

(c) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x^2\sin\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.

Λύση: (a) Το όριο $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει: αν πάρουμε τις δύο ακολουθίες $a_n=\frac{1}{2\pi n}$ και $b_n=\frac{1}{2\pi n+\pi/2}$ βλέπουμε ότι η συνάρτησή μας πάνω στην a_n είναι σταθερά ίση με 0 ενώ πάνω στην b_n είναι σταθερά ίση με 1. Αφού $a_n\to 0$ και $b_n\to 0$ το όριο δεν υπάρχει, άρα η συνάρτηση δεν μπορεί να γίνει συνεχής στο 0 όπως και αν την ορίσουμε εκεί.

(b) Για $x\to 0$ έχουμε φυσικά όριο 0 αφού η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη. Αν ορίσουμε λοιπόν τη συνάρτησή μας να κάνει 0 στο 0 τότε είναι συνεχής στο 0 (μόνο αυτή η τιμή δουλεύει φυσικά). Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη γιατί το πηλίκο διαφορών για $h\to 0$ είναι

$$\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\sin\frac{1}{h}$$

που δεν έχει όριο όπως είδαμε στο (a).

(c) Το πηλίκο διαφορών τώρα είναι το

$$\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=h\sin\frac{1}{h}\to 0$$

όπως δείξαμε στο (b) άρα υπάρχει η παράγωγος στο 0 και είναι 0.

---

2. (a) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση δείξτε ότι η $g(x)=x^2f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(b) Βρείτε μια συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που να είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.

Για το (b) χρησιμοποιήστε το (a) και τη συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ που ισούται με 1 αν $x\in\mathbb{Q}$ (ρητός) και με 0 αν $x\notin\mathbb{Q}$ (άρρητος).

Λύση: (a) Το πηλίκο διαφορών είναι

$$\frac{1}{h}(g(h)-g(0))=\frac{1}{h}(h^2f(h)-0)=hf(h)\to 0$$

αφού η f είναι φραγμένη.

(b) Πάρτε τη συνάρτηση $h(x)=x^2\chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Είναι παραγωγίσιμη στο 0 σύμφωνα με το (a). Σε οποιονδήποτε άλλο πραγματικό αριθμό x η συνάρτηση δεν είναι καν συνεχής, άρα ούτε και παραγωγίσιμη. Πράγματα αν q_n είναι μια ακολουθία ρητών που τείνει στο x και a_n μια ακολουθία αρρήτων που τείνει στο x τότε τα όρια $h(q_n)$ και $h(a_n)$ είναι $x^2\neq 0$ και 0 αντίστοιχα, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x.

---

3. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο του γινομένου τριών συναρτήσεων $(f\cdot g\cdot h)'$.

Λύση: Αν εφαρμόσουμε τον τύπο για την παράγωγο γινομένου δύο φορές παίρνουμε:

$$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'.$$

---

4. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο της σύνθεσης τριών συναρτήσεων $f(g(h(x)))$.

Λύση: Εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα της αλυσίδας και παίρνουμε

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

---

5. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες που μεταβάλλονται με το χρόνο με τρόπο ώστε ο μεταξύ τους δακτύλιος να έχει πάντα εμβαδό ίσο με 9π. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι σταθερός και ίσος με 10π. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της περιφέρειας του μικρού κύκλου όταν αυτός έχει εμβαδό ίσο με 16π;

Λύση: Ας είναι $r(t)$ και $R(t)$ οι ακτίνες του μικρού και του μεγάλου κύκλου τη χρονική στιγμή t. Μας δίδεται ότι

$$(\pi R^2)' = 10\pi.$$

Επίσης ότι

$$\pi R^2 - \pi r^2 = 9\pi,$$

από το οποίο και το προηγούμενο έπεται με παραγώγιση ότι

$$10\pi = (\pi r^2)' = 2\pi r' r,$$

άρα

$$(2\pi r)' = \frac{10\pi}{r}.$$

Από το ότι $\pi r^2 = 16\pi$ έπεται $r = 4$ άρα παίρνουμε τελικά $(2\pi r)' = \frac{5}{2}\pi$.

---

6. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο (x_0, y_0);

Λύση: Παραγωγίζουμε ως προς x την εξίσωση της έλλειψης και παίρνουμε

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0.$$

Λύνουμε ως προς y' και βρίσκουμε

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Στο σημείο (x_0, y_0) η εφαπτόμενή μας ευθεία έχει συνεπώς την εξίσωση

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0.$$

---

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και $f(a) \neq 0$ δείξτε ότι και η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο a.

Λύση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο a είναι αναγκαστικά και συνεχής εκεί, άρα υπάρχει ένα διάστημα $(a - \epsilon, e + \epsilon)$ στο οποίο η f θα έχει σταθερό πρόσημο. Σε αυτό το διάστημα η $|f|$ ισούται με την f ή ισούται με την $-f$. Σε κάθε περίπτωση θα είναι παραγωγίσιμη στο a.

8. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο 0 και με $f(0) = g(0) = 0$ τέτοιες ώστε

$$x = f(x)g(x)$$

για $x \in [-1, 1]$.

Λύση: Αν υπήρχαν θα μπορούσαμε να παραγωγίσουμε τη σχέση $fg = x$ και θα παίρναμε $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1$ που δεν ισχύει για $x = 0$.

---

9. Έστω $a > 1$ και $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^a}$ (ορίζουμε $f(0) = 0$). Δείξτε ότι υπάρχει παντού η f' και είναι συνεχής παντού εκτός από το 0.

Λύση: Αν $x \neq 0$ είναι φανερό ότι υπάρχει η παράγωγος στο x και ισούται με

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^a} + x^2(-a)\frac{1}{x^{a+1}} \cos \frac{1}{x^a} = 2x \sin \frac{1}{x^a} - a\frac{1}{x^{a-1}} \cos \frac{1}{x^a},$$

που είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση αν $x \neq 0$. Από το Πρόβλημα 2(a) παίρνουμε ότι και στο 0 υπάρχει η παράγωγος και μάλιστα ισούται με το 0.

Αλλά το όριο $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει. Το όριο του πρώτου προσθετέου είναι 0 αλλά το όριο του δεύτερου προσθετέου δεν υπάρχει αφού ο παράγοντας x^{1-a} απειρίζεται και το συνημίτονο, που εναλλάσεται άπειρες φορές από το -1 στο 1 όταν $x \to 0$ κάνει το όριο να μην είναι καν $\pm\infty$.

Άρα η παράγωγος δεν είναι συνεχής στο 0.

---

10. Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, τις παρακάτω παραγώγους στα σημεία που δίνονται.

(1) $f(x) = x^2 - 3x$ στο $x = 2$.
(2) $g(x) = 1/x$ στο $x = 1$.
(3) $h(x) = \sqrt{x}$ στο $x = 4$.

Λύση:

(1) Για $t \neq 0$ έχουμε $(f(2 + t) - f(2))/t = 1 + t$, άρα $f'(2) = 1$.
(2) Για $t \neq 0$ κοντά στο 0 έχουμε $\dfrac{g(1 + t) - g(1)}{t} = \dfrac{1/(1 + t) - 1}{t} = -\dfrac{1}{1 + t} \to -1$. Άρα $g'(1) = -1$.
(3) Με τη συζυγή παράσταση βρίσκουμε $\dfrac{\sqrt{4 + t} - 2}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{4 + t} + 2} \to \dfrac{1}{4}$. Άρα $h'(4) = 1/4$.

---

11. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου.

(1) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$.
(2) $g(x) = x^2 \sin x$.
(3) $h(x) = x \sin x \cos x$.

Λύση:

(1) $f'(x) = 2x(x^3 - 2x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 2) = 5x^4 - 3x^2 - 2$.
(2) $g'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$.
(3) Παραγωγίζουμε διαδοχικά τους τρεις παράγοντες και παίρνουμε $h'(x) = \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x$. Ισοδύναμα, $h'(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + x \cos(2x)$.

12. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων. Να αναφέρετε σε ποια σημεία ισχύει κάθε τύπος.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
(2) $g(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.
(3) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Λύση:

(1) Για $x \neq 1$ ο κανόνας του πηλίκου δίνει $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

(2) Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Σε αυτό ισχύει

$$g'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}. \tag{1}$$

(3) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφουμε $h(x) = x(1+x^2)^{-1/2}$ και βρίσκουμε $h'(x) = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2} = (1+x^2)^{-3/2}$.

---

13. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων με τον κανόνα της αλυσίδας.

(1) $f(x) = (1-3x^2)^5$.
(2) $g(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$.
(3) $h(x) = \sin\left((x^2+1)^3\right)$.

Λύση:

(1) $f'(x) = 5(1-3x^2)^4(-6x) = -30x(1-3x^2)^4$.
(2) $g'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} = \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
(3) Εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα της αλυσίδας: $h'(x) = \cos\left((x^2+1)^3\right)\ 3(x^2+1)^2\,2x = 6x(x^2+1)^2\cos\left((x^2+1)^3\right)$.

Και οι τρεις τύποι ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

---

14. Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(1) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο με τετμημένη 2.
(2) Βρείτε όλα τα σημεία του γραφήματος όπου η εφαπτόμενη είναι οριζόντια.
(3) Βρείτε όλα τα σημεία του γραφήματος όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x$.

Λύση: Έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 3$.

(1) $f(2) = 4$ και $f'(2) = 9$. Η εφαπτόμενη είναι $y - 4 = 9(x-2)$, δηλ. $y = 9x - 14$.
(2) Λύνουμε $3x^2 - 3 = 0$ και παίρνουμε $x = \pm 1$. Τα σημεία είναι $(-1, 4)$ και $(1, 0)$.
(3) Λύνουμε $3x^2 - 3 = 9$ και παίρνουμε $x = \pm 2$. Τα σημεία είναι $(2, 4)$ και $(-2, 0)$.

15. Μια καμπύλη έχει εξίσωση $x^2 + xy + y^2 = 7$.

(1) Θεωρώντας το y ως παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, υπολογίστε το y' σε συνάρτηση των x, y όπου $x + 2y \neq 0$.
(2) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $(1, 2)$.
(3) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $(2, 1)$.

Λύση:

(1) Παραγωγίζοντας την εξίσωση παίρνουμε $2x + y + xy' + 2yy' = 0$. Άρα $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$.
(2) Στο $(1, 2)$ έχουμε $y' = -4/5$, οπότε $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$, δηλ. $4x + 5y = 14$.
(3) Στο $(2, 1)$ έχουμε $y' = -5/4$, οπότε $y - 1 = -\frac{5}{4}(x - 2)$, δηλ. $5x + 4y = 14$.

Και τα δύο σημεία ανήκουν στην καμπύλη και στα δύο ο παρονομαστής του τύπου για το y' είναι μη μηδενικός.

---

16. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x < 1, \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 1. Για αυτές τις τιμές γράψτε έναν τύπο για την $f'(x)$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση: Πρώτα πρέπει η f να είναι συνεχής στο 1, άρα $a + b + 1 = 1$, δηλ. $a + b = 0$. Με αυτή τη συνθήκη, το αριστερό πηλίκο διαφορών στο 1 είναι

$$\frac{a(1+t)^2 + b(1+t) + 1 - 1}{t} = 2a + b + at \quad (t < 0). \tag{3}$$

Η αριστερή παράγωγος είναι επομένως $2a + b$. Η δεξιά παράγωγος είναι 3. Λύνοντας το σύστημα $a + b = 0$, $2a + b = 3$ παίρνουμε $a = 3$, $b = -3$. Αντίστροφα, για αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι συνεχής στο 1 και τα δύο πλευρικά πηλίκα διαφορών τείνουν στο 3, άρα είναι παραγωγίσιμη εκεί. Τελικά

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - 3, & x < 1, \\ 3, & x = 1, \\ 3x^2, & x > 1. \end{cases} \tag{4}$$

---

17. Για τις συναρτήσεις $f(x) = x|x|$ και $g(x) = \big|x^2 - 1\big|$:

(1) Γράψτε τους τύπους τους χωρίς απόλυτες τιμές, χωρίζοντας το $\mathbb{R}$ σε κατάλληλα διαστήματα.
(2) Βρείτε σε ποια σημεία είναι παραγωγίσιμες και υπολογίστε την παράγωγο σε αυτά. Στα σημεία όπου αλλάζει ο τύπος να χρησιμοποιήσετε πλευρικές παραγώγους ή τον ορισμό.

Λύση: Για $x < 0$ έχουμε $f(x) = -x^2$, ενώ για $x \geq 0$ έχουμε $f(x) = x^2$. Για $x \neq 0$ η παράγωγος είναι $f'(x) = 2|x|$. Στο 0, το πηλίκο διαφορών είναι $f(t)/t = |t| \to 0$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη παντού και ο τύπος $f'(x) = 2|x|$ ισχύει και στο 0.

Η g ισούται με $x^2 - 1$ για $|x| \geq 1$ και με $1 - x^2$ για $|x| < 1$. Επομένως $g'(x) = 2x$ για $|x| > 1$ και $g'(x) = -2x$ για $|x| < 1$. Στο -1 οι αριστερή και δεξιά παράγωγοι είναι -2 και 2, ενώ στο 1 είναι επίσης -2 και 2. Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη ακριβώς στα σημεία -1 και 1.

18. Ένα σώμα κινείται πάνω σε ευθεία και η θέση του, σε μέτρα, τη χρονική στιγμή t δευτερολέπτων είναι $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, για $0 \le t \le 5$.

(1) Υπολογίστε την ταχύτητά του $v(t) = s'(t)$ και βρείτε τις χρονικές στιγμές στις οποίες μηδενίζεται.
(2) Σε ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τη θετική και σε ποια προς την αρνητική κατεύθυνση;
(3) Βρείτε τη μετατόπιση και το συνολικό μήκος της διαδρομής από $t = 0$ έως $t = 5$.

Λύση:

(1) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$, σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Μηδενίζεται στις στιγμές $t = 1$ και $t = 3$.
(2) Η ταχύτητα είναι θετική για $0 < t < 1$ και $3 < t < 5$, και αρνητική για $1 < t < 3$.
(3) Οι θέσεις στις κρίσιμες χρονικές στιγμές είναι $s(0) = 0$, $s(1) = 4$, $s(3) = 0$, $s(5) = 20$. Η μετατόπιση είναι $s(5) - s(0) = 20$ μέτρα. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι $|4 - 0| + |0 - 4| + |20 - 0| = 28$ μέτρα.

---

19. Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπά σε κατακόρυφο τοίχο. Η κάτω άκρη της απομακρύνεται από τον τοίχο με σταθερό ρυθμό 0,4 μέτρα ανά δευτερόλεπτο, ενώ η πάνω άκρη της παραμένει στον τοίχο.

(1) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το ύψος της πάνω άκρης όταν η κάτω άκρη απέχει 3 μέτρα από τον τοίχο;
(2) Την ίδια στιγμή, με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν η σκάλα, ο τοίχος και το έδαφος;

Λύση: Έστω $x(t)$ η απόσταση της κάτω άκρης από τον τοίχο και $y(t)$ το ύψος της πάνω άκρης. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, $x^2 + y^2 = 25$, άρα $2xx' + 2yy' = 0$.

(1) Όταν $x = 3$ έχουμε $y = 4$ και $x' = 0{,}4 = 2/5$. Άρα $y' = -xx'/y = -3/10$ μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Η πάνω άκρη κατεβαίνει με ρυθμό 0,3 μέτρα ανά δευτερόλεπτο.
(2) Το εμβαδό είναι $A = xy/2$, οπότε $A' = \dfrac{x'y + xy'}{2} = \dfrac{(2/5)4 + 3(-3/10)}{2} = \dfrac{7}{20}$ τετραγωνικά μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Άρα εκείνη τη στιγμή το εμβαδό αυξάνεται.