Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο Ασκήσεων $\boxed{5}$ - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 20 Οκτωβρίου 2026

1. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής στο 0, όπως και αν την ορίσουμε στο 0.

(b) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.

(c) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x^2\sin\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν της δώσουμε κατάλληλη τιμή στο 0.

2. (a) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση δείξτε ότι η $g(x)=x^2f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(b) Βρείτε μια συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που να είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.

Για το (b) χρησιμοποιήστε το (a) και τη συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ που ισούται με 1 αν $x\in\mathbb{Q}$ (ρητός) και με 0 αν $x\notin\mathbb{Q}$ (άρρητος).

3. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο του γινομένου τριών συναρτήσεων $(f\cdot g\cdot h)'$.

4. Βρείτε ένα τύπο για την παράγωγο της σύνθεσης τριών συναρτήσεων $f(g(h(x)))$.

5. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες που μεταβάλλονται με το χρόνο με τρόπο ώστε ο μεταξύ τους δακτύλιος να έχει πάντα εμβαδό ίσο με 9π. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι σταθερός και ίσος με 10π. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της περιφέρειας του μικρού κύκλου όταν αυτός έχει εμβαδό ίσο με 16π;

6. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο (x_0, y_0);

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και $f(a) \neq 0$ δείξτε ότι και η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο a.

8. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο 0 και με $f(0) = g(0) = 0$ τέτοιες ώστε

$$x = f(x)g(x)$$

για $x \in [-1, 1]$.

9. Έστω $a > 1$ και $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^a}$ (ορίζουμε $f(0) = 0$). Δείξτε ότι υπάρχει παντού η f' και είναι συνεχής παντού εκτός από το 0.

10. Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, τις παρακάτω παραγώγους στα σημεία που δίνονται.

(1) $f(x) = x^2 - 3x$ στο $x = 2$.
(2) $g(x) = 1/x$ στο $x = 1$.
(3) $h(x) = \sqrt{x}$ στο $x = 4$.

11. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου.

(1) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$.
(2) $g(x) = x^2 \sin x$.
(3) $h(x) = x \sin x \cos x$.

12. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων. Να αναφέρετε σε ποια σημεία ισχύει κάθε τύπος.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.
(2) $g(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.
(3) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

13. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων με τον κανόνα της αλυσίδας.

(1) $f(x) = (1 - 3x^2)^5$.
(2) $g(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$.
(3) $h(x) = \sin\left((x^2 + 1)^3\right)$.

14. Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(1) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο με τετμημένη 2.
(2) Βρείτε όλα τα σημεία του γραφήματος όπου η εφαπτόμενη είναι οριζόντια.
(3) Βρείτε όλα τα σημεία του γραφήματος όπου η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x$.

15. Μια καμπύλη έχει εξίσωση $x^2 + xy + y^2 = 7$.

(1) Θεωρώντας το y ως παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, υπολογίστε το y' σε συνάρτηση των x, y όπου $x+2y \neq 0$.
(2) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $(1, 2)$.
(3) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $(2, 1)$.

16. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x < 1, \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 1. Για αυτές τις τιμές γράψτε έναν τύπο για την $f'(x)$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

17. Για τις συναρτήσεις $f(x) = x|x|$ και $g(x) = \left|x^2 - 1\right|$:

(1) Γράψτε τους τύπους τους χωρίς απόλυτες τιμές, χωρίζοντας το $\mathbb{R}$ σε κατάλληλα διαστήματα.
(2) Βρείτε σε ποια σημεία είναι παραγωγίσιμες και υπολογίστε την παράγωγο σε αυτά. Στα σημεία όπου αλλάζει ο τύπος να χρησιμοποιήσετε πλευρικές παραγώγους ή τον ορισμό.

18. Ένα σώμα κινείται πάνω σε ευθεία και η θέση του, σε μέτρα, τη χρονική στιγμή t δευτερολέπτων είναι $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, για $0 \leq t \leq 5$.

(1) Υπολογίστε την ταχύτητά του $v(t) = s'(t)$ και βρείτε τις χρονικές στιγμές στις οποίες μηδενίζεται.
(2) Σε ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τη θετική και σε ποια προς την αρνητική κατεύθυνση;
(3) Βρείτε τη μετατόπιση και το συνολικό μήκος της διαδρομής από $t = 0$ έως $t = 5$.

19. Μια σκάλα μήκους 5 μέτρων ακουμπά σε κατακόρυφο τοίχο. Η κάτω άκρη της απομακρύνεται από τον τοίχο με σταθερό ρυθμό 0,4 μέτρα ανά δευτερόλεπτο, ενώ η πάνω άκρη της παραμένει στον τοίχο.

(1) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το ύψος της πάνω άκρης όταν η κάτω άκρη απέχει 3 μέτρα από τον τοίχο;
(2) Την ίδια στιγμή, με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν η σκάλα, ο τοίχος και το έδαφος;