Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

---

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρανομαστή όπου χρειάζεται.

(1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

(2) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

(3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$.

Λύση:

(1) Για $x \neq 2$ το κλάσμα ισούται με $x-3$, άρα το όριο είναι -1.

(2) Για $x \neq 2$ κοντά στο 2 έχουμε $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2+2x+4}{x+2} \to 3$.

(3) Απλοποιούμε τον παράγοντα $x-1$ και παίρνουμε $\dfrac{x^4-1}{x^3-1} = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} \to \dfrac{4}{3}$.

---

2. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Στα δύο πρώτα χρησιμοποιήστε συζυγείς παραστάσεις και στο τρίτο την ταυτότητα $u^3-v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$.

(1) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

(3) $\lim_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

Λύση:

(1) Για $x \neq 4$ το κλάσμα ισούται με $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+3}$ και τείνει στο $1/6$.

(2) Για $x \neq 0$ κοντά στο 0 το κλάσμα ισούται με $\dfrac{3}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x}}$ και τείνει στο $3/2$.

(3) Θέτουμε $u = \sqrt[3]{x}$. Τότε $x-8 = (u-2)(u^2+2u+4)$. Για $x \neq 8$ το κλάσμα ισούται με $1/(u^2+2u+4)$ και τείνει στο $1/12$.

---

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με κατάλληλη δύναμη του x.

(1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+5}$.

(2) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x-7}{x^2+1}$.

(3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$ και $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+x}{x^2+1}$.

Λύση:

(1) Το κλάσμα ισούται με $\dfrac{3-1/x+1/x^2}{2+5/x^2}$, οπότε το όριο είναι $3/2$.

(2) Το κλάσμα ισούται με $\dfrac{4/x - 7/x^2}{1 + 1/x^2}$, οπότε το όριο είναι 0.

(3) Γράφουμε το κλάσμα ως $x\dfrac{2 + 1/x^2}{1 + 1/x^2}$. Ο δεύτερος παράγοντας τείνει στο 2 και είναι θετικός. Τα δύο όρια είναι αντίστοιχα $+\infty$ και $-\infty$.

---

4. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, προσέχοντας ότι $\sqrt{x^2} = |x|$.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)$.

Λύση:

(1) Για $x > 0$, πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή παράσταση παίρνουμε $\sqrt{x^2+3x} - x = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \dfrac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} \to \dfrac{3}{2}$.

(2) Για $x \le -3$ η ρίζα ορίζεται και είναι μη αρνητική, οπότε $\sqrt{x^2+3x} - x \ge -x \to +\infty$.

(3) Για $x < -3$ έχουμε $\sqrt{x^2+3x} = -x\sqrt{1+3/x}$. Άρα, με τη συζυγή παράσταση,

$$\sqrt{x^2+3x} + x = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} - x} = \frac{-3}{\sqrt{1+3/x}+1} \to -\frac{3}{2}. \tag{1}$$

---

5. Υπολογίστε τα δύο πλευρικά όρια καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις στο σημείο που δίνεται. Στη συνέχεια αποφασίστε αν υπάρχει το αντίστοιχο δίπλευρο όριο.

(1) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ στο 2.

(2) $g(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ στο 1.

(3) $h(x) = \dfrac{|x|-1}{x+1}$ στο -1.

Λύση:

(1) Αριστερά του 2 η f ισούται με -1 και δεξιά με 1. Τα πλευρικά όρια είναι -1 και 1, άρα το δίπλευρο όριο δεν υπάρχει.

(2) Κοντά στο 1 έχουμε $x + 1 > 0$ και $g(x) = (x+1)\dfrac{|x-1|}{x-1}$. Τα πλευρικά όρια είναι -2 και 2, άρα το δίπλευρο όριο δεν υπάρχει.

(3) Κοντά στο -1 έχουμε $x < 0$, οπότε για $x \ne -1$ ισχύει $h(x) = \dfrac{-x-1}{x+1} = -1$. Και τα δύο πλευρικά όρια, άρα και το δίπλευρο, είναι -1.

---

6. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, χρησιμοποιώντας ως γνωστό το όριο $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ και τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι γωνίες μετρώνται σε ακτίνια.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{5x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(2x)}{\sin(5x)}$.

Λύση:

(1) Γράφουμε $\dfrac{\sin(3x)}{5x} = \dfrac{3}{5}\dfrac{\sin(3x)}{3x} \to \dfrac{3}{5}$.

(2) Από την ταυτότητα $1-\cos(2x) = 2\sin^2 x$ παίρνουμε $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \to 2$.

(3) Κοντά στο 0, για $x \neq 0$, γράφουμε

$$\frac{\tan(2x)}{\sin(5x)} = \frac{2}{5}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{5x}{\sin(5x)}\frac{1}{\cos(2x)} \to \frac{2}{5}. \tag{2}$$

---

7. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια κατάλληλων φραγμάτων.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x^2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Λύση: Αφού $|\sin t| \le 1$ και $|\cos t| \le 1$, έχουμε αντίστοιχα

(1) $|x\sin(1/x)| \le |x| \to 0$.

(2) $\left|x^2\cos(1/x^2)\right| \le x^2 \to 0$.

(3) Για $x>0$, $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{x} \to 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής και τα τρία όρια είναι 0.

---

8. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια στο $\overline{\mathbb{R}}$, ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν.

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Λύση:

(1) Τα πλευρικά όρια είναι αντίστοιχα $-\infty$ και $+\infty$. Αφού διαφέρουν, το δίπλευρο όριο δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$.

(2) Για $0<|x-1|<1$ έχουμε $x+2>2$, άρα το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από $2/(x-1)^2$. Το όριο είναι $+\infty$.

(3) Η διαφορά ισούται με $(1-x)/x^2$. Για $0<|x|<1/2$ είναι μεγαλύτερη από $1/(2x^2)$, άρα τείνει στο $+\infty$.

---

9. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1, \\ a, & x=1, \\ bx+1, & x>1 \end{cases} \tag{3}$$

να είναι συνεχής στο 1. Για αυτές τις τιμές υπολογίστε επίσης τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Λύση: Για $x < 1$ έχουμε $f(x) = x + 1$, οπότε το αριστερό όριο στο 1 είναι 2. Το δεξί όριο είναι $b+1$. Για συνέχεια στο 1 πρέπει και αρκεί να ισχύει $2 = b+1 = a$, δηλ. $a = 2$ και $b = 1$. Με αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι $f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $(f(x) - 2)/(x - 1) = 1$ για $x \neq 1$, και το πρώτο όριο είναι 1. Επίσης $f(x)/x = 1 + 1/x \to 1$ καθώς $x \to +\infty$.

---

10. Υποθέτουμε ότι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

(a) Αν για τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε $f(x) > \ell$ δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $c > \ell$ που να ισχύει $f(x) \geq c$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(b) Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq g(x) + \delta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση: (a) Έστω ότι η f πιάνει το ελάχιστό της στο $x_1 \in [a, b]$. Τότε $f(x_1) > \ell$ από την υπόθεσή μας. Αν θέσουμε λοιπόν $c = f(x_1)$ τότε έχουμε το ζητούμενο.

(b) Έστω ότι η $f - g$, που είναι συνεχής, πιάνει το ελάχιστό της στο $x_2 \in [a, b]$ και ορίζουμε $\delta = f(x_2) - g(x_2) > 0$ από την υπόθεσή μας. Εύκολα βλέπουμε ότι με αυτή την επιλογή μας ισχύει το ζητούμενο.

---

11. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, υπάρχει δηλ. $a \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f(a) = a$.

Λύση: Το ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μια ακολουθία $x_n \to +\infty$ τέτοια ώστε δεν ισχύει $\lim_n f(x_n) = +\infty$. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $M_1 \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f(x_n) \leq M_1$ για άπειρα n. Από την υπόθεσή μας για το όριο στο $-\infty$ προκύπτει ομοίως ότι υπάρχει $y_n \to -\infty$ και $M_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(y_n) \geq M_2$ για άπειρα n. Για ευκολία μας καλούμε αυτές τις δύο υπακολουθίες x_n και y_n (ξεχνώντας τα υπόλοιπα στοιχεία των αρχικών ακολουθιών).

Κοιτάμε τώρα τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ και θέλουμε να δείξουμε ότι κάπου μηδενίζεται. Αρκεί να βρούμε δύο σημεία όπου οι τιμές της g είναι ετερόσημες. Εϋκολα βλέπουμε ότι $g(x_n) \to -\infty$ αφού η $f(x_n)$ είναι φραγμένη άνω και ομοίως βλέπουμε ότι $g(y_n) \to +\infty$ αφού η $f(y_n)$ είναι φραγμένη κάτω. Άρα για αρκετά μεγάλο n θα έχουμε $g(x_n) < 0$ και $g(y_n) > 0$ που είναι τα δύο σημεία που ψάχναμε.

---

12. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) > 0$ δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon, \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \geq \epsilon$.

Λύση: Αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τ.ώ. αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι

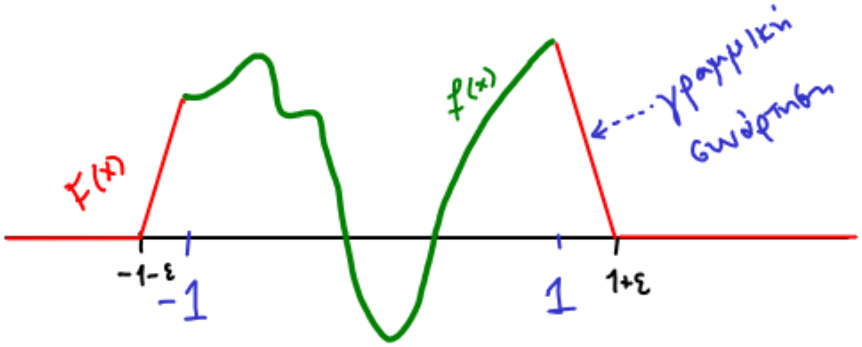
$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

ανισότητα η οποία συνεπάγεται ότι για αυτά τα x ισχύει επίσης $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$, το οποίο παίρνουμε ως το ϵ που ζητάει η άσκηση.

---

13. Αν $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε (α) $F(x) = f(x)$ για $x \in [-1, 1]$ και (β) $F(x) = 0$ αν $x \leq -1 - \epsilon$ ή $x \geq 1 + \epsilon$.

Λύση:



Σχημα 1. Πώς επεκτείνουμε μια συνάρτηση διατηρώντας τη συνέχεια ώστε να μηδενίζεται λίγο έξω από το αρχικό διάστημα.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 επεκτείνουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[1, 1+\epsilon]$ ως μια γραμμική συνάρτηση (της μορφής δηλ. $ax + b$) που το γράφημά της ενώνει με ένα ευθύγραμμο τμήμα τα σημεία $(1, f(1))$ και $(1 + \epsilon, 0)$. Δεξιά από το $1 + \epsilon$ την ορίζουμε να είναι 0. Η συνέχεια μέσα στο ανοιχτό διάστημα $(1, 1+\epsilon)$ είναι εξασφαλισμένη μια και εκεί μέσα η συνάρτησή μας δίνεται απλά από ένα τύπο της μορφής $F(x) = ax+b$. Στα άκρα, δηλ. στα σημεία 1 και $1+\epsilon$ ελέγχουμε εύκολα ότι τα πλευρικά όρια είναι αυτό που πρέπει. Ομοίως επεκτείνουμε προς τα αριστερά.

Προσέξτε ότι αν απλά ορίσουμε την F να είναι 0 εκτός του $[-1, 1]$ χάνουμε τη συνέχεια στα σημεία ± 1 εκτός αν τύχει η f να μηδενίζεται σε κάποιο από αυτά.

---

14. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

Λύση: (a) Το σημαντικό σε αυτή την άσκηση είναι ότι και το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και το σύνολο των αρρήτων αριθμών $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι αυτό που ονομάζουμε *πυκνά σύνολα* στο $\mathbb{R}$.

Ένα σύνολο λέγεται πυκνό στο $\mathbb{R}$ αν μπορούμε να βρούμε στοιχείο του σε οποιοδήποτε διάστημα θετικού μήκους, όπου και να είναι αυτό και όσο μικρό και να είναι το μήκος του.

Αν μας δώσουν ένα διάστημα $(a, a+\epsilon)$ με $a \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ επιλέγουμε ένα φυσικό αριθμό $n > 1/\epsilon$ και παρατηρούμε ότι κάποιο πολλαπλάσιο του $1/n$, ας το πούμε k/n με $k \in \mathbb{Z}$, θα ανήκει στο διάστημα $(a, a + \epsilon)$. Ο λόγος είναι ότι το μήκος του διαστήματος είναι μεγαλύτερο από $1/n$ που είναι η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά πολλαπλάσια του $1/n$. Βρήκαμε έτσι ένα ρητό αριθμό $q = k/n$ στο $(a, a+\epsilon)$. Για να βρούμε ένα άρρητο αριθμό παίρνουμε ένα αριθμό της μορφής $q + \frac{\sqrt{2}}{N}$ για αρκετά μεγάλο N, τόσο μεγάλο ώστε ο αριθμός αυτός να ανήκει στο διάστημα $(a, a + \epsilon)$, πράγμα που γίνεται αν το N είναι αρκετά μεγάλο αφού ο αριθμός q έχει *θετική* απόσταση από τα δύο άκρα του διαστήματος. Εύκολα βλέπουμε ότι ένας τέτοιος αριθμός είναι αναγκαστικά άρρητος (αν δεν ήταν θα μπορούσαμε, λύνοντας ως προς το $\sqrt{2}$, να δείξουμε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός, που δεν είναι).

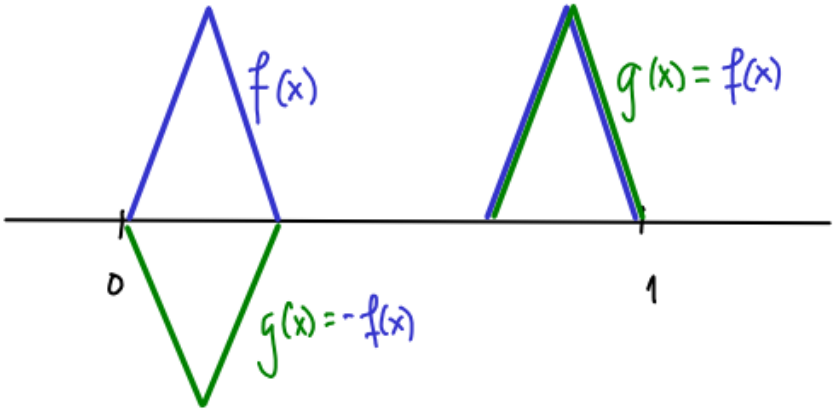
Αν τώρα πάρουμε οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$ και ρητοί και άρρητοι αριθμοί, δηλ. η D παίρνει και τιμή 1 και τιμή 0. Αυτό συνεπάγεται ότι το όριο της D στο x δεν υπάρχει, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κανένα x.

(b) Πάρτε $f(x) = xD(x)$. Σε οποιοδήποτε $x \neq 0$ μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής (αν ήταν τότε και η $D(x) = f(x)/x$ θα ήταν εκεί συνεχής, που ξέρουμε από το (a) ότι δεν είναι). Στο 0 η f είναι συνεχής μια και $f(0) = 0$ και επίσης $|f(x)| \leq |x|$, που συνεπάγεται ότι το όριο της f στο 0 είναι 0.

15. (a) Αν $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει για όλα τα $x \in (a, b)$ η ισότητα $f(x) = g(x)$ είτε για όλα ισχύει η ισότητα $f(x) = -g(x)$. Δείξτε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι οι f, g δε μηδενίζονται.

(b) Αν $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x > 0$ τη σχέση $f^2(x) = x$ δείξτε ότι είτε ισχύει για κάθε $x > 0$ η ισότητα $f(x) = \sqrt{x}$ είτε για κάθε τέτοιο x ισχύει η ισότητα $f(x) = -\sqrt{x}$.

Λύση:



Σχημα 2. Οι δύο συνεχείς συναρτήσεις (μπλε και πράσινη) αλλού είναι ίσες και αλλού αντίθετες.

(a) Αφού οι f, g δε μηδενίζονται πουθενά και είναι συνεχείς έπειται ότι και η συνάρτηση $h = f/g$ είναι συνεχής. Από την υπόθεσή μας $h^2(x) = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$, δηλ. για κάθε $x \in (a, b)$ έχουμε $h(x) = \pm 1$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι η h είναι σταθερή 1 ή -1, που είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

Αν επιτρέψουμε στις f, g να μηδενίζονται αυτό δεν ισχύει. Πάρτε για παράδειγμα $(0, 1)$ και τις δύο συναρτήσεις που φαίνονται στο Σχήμα 2.

(b) Η συνάρτηση $h(x) = f(x)/\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (αφού ο παρανομαστής είναι συνεχής και δε μηδενίζεται - η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι συνεχής ως αντίστροφη της συνάρτησης x^2) και ισχύει $h^2(x) = 1$ άρα $h(x) = \pm 1$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής η h πρέπει να είναι σταθερή 1 ή -1, που είναι ακριβώς το ζητούμενο.