

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο
Ασκήσεων 4 - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: **12 Οκτωβρίου 2026**

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρανομαστή όπου χρειάζεται.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}.$$

2. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Στα δύο πρώτα χρησιμοποιήστε συζυγείς παραστάσεις και στο τρίτο την ταυτότητα $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}.$$

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με κατάλληλη δύναμη του x .

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 7}{x^2 + 1}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1}.$$

4. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, προσέχοντας ότι $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right).$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} + x \right).$$

5. Υπολογίστε τα δύο πλευρικά όρια καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις στο σημείο που δίνεται. Στη συνέχεια αποφασίστε αν υπάρχει το αντίστοιχο δίπλευρο όριο.

$$(1) f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} \text{ στο } 2.$$

$$(2) g(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1} \text{ στο } 1.$$

$$(3) h(x) = \frac{|x|-1}{x+1} \text{ στο } -1.$$

6. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, χρησιμοποιώντας ως γνωστό το όριο $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ και τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι γωνίες μετρώνται σε ακτίνια.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(5x)}.$$

7. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια με τη βοήθεια κατάλληλων φραγμάτων.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

8. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια στο $\overline{\mathbb{R}}$, ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right).$$

9. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b ώστε η συνάρτηση

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1, \\ a, & x = 1, \\ bx + 1, & x > 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο 1. Για αυτές τις τιμές υπολογίστε επίσης τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

10. Υποθέτουμε ότι $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

(a) Αν για τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε $f(x) > \ell$ δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $c > \ell$ που να ισχύει $f(x) \geq c$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(b) Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq g(x) + \delta$ για κάθε $x \in [a, b]$.

11. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ούτε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, υπάρχει δηλ. $a \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $f(a) = a$.

12. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) > 0$ δείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon, \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \geq \epsilon$.

13. Αν $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, τέτοια ώστε (α) $F(x) = f(x)$ για $x \in [-1, 1]$ και (β) $F(x) = 0$ αν $x \leq -1 - \epsilon$ ή $x \geq 1 + \epsilon$.

14. (a) Δείξτε ότι η συνάρτηση του Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός αριθμός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος αριθμός} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής πουθενά.

(b) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής μόνο στο 0.

15. (a) Αν $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f^2(x) = g^2(x) \neq 0$ αποδείξτε ότι είτε ισχύει για όλα τα $x \in (a, b)$ η ισότητα $f(x) = g(x)$ είτε για όλα ισχύει η ισότητα $f(x) = -g(x)$. Δείξτε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι οι f, g δε μηδενίζονται.

(b) Αν $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x > 0$ τη σχέση $f^2(x) = x$ δείξτε ότι είτε ισχύει για κάθε $x > 0$ η ισότητα $f(x) = \sqrt{x}$ είτε για κάθε τέτοιο x ισχύει η ισότητα $f(x) = -\sqrt{x}$.