

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο
Ασκήσεων **3** - Μιχάλης Κολουντζάκης
Λύσεις των ασκήσεων

1. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n τον τύπο

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Λύση: Πρώτα ελέγχουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = 1$, πράγμα πολύ απλό.

Έπειτα υποθέτουμε την $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ και αποδεικνύουμε την ίδια πρόταση για $n + 1$ δηλ. την ισότητα

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Αυτό γίνεται προσθέτοντας και στα δύο μέλη της (1) το $n + 1$ και κάνοντας πράξεις στο δεξί μέλος.

2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^4, \quad b_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}}, \quad c_n = \frac{1}{\frac{1}{n} + 2^{-n}}, \quad d_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Λύση: $a_n \rightarrow 16 = 2^4$ αφού αυτό που είναι υψωμένο στην 4η δύναμη πάει στο 2.

Για την b_n διαιρούμε με το μεγάλο όρο στον παρανομαστή, το 3^{n+1} , και παίρνουμε

$$b_n = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

Ο αριθμητής τείνει στο $1/3$ και ο παρανομαστής στο 1, άρα $b_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

$c_n \rightarrow +\infty$ αφού ο παρανομαστής τείνει στο 0 από θετικές τιμές.

Εύκολα μπορούμε να δούμε με επαγωγή ότι $d_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, άρα $d_n \rightarrow 1$.

3. Αν γνωρίζετε ότι $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ και ότι η a_n ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2^n},$$

για $n \geq 2$, βρείτε το όριο a .

Λύση: Παίρνοντας όρια στην (2) παίρνουμε $a = \frac{1}{2}a + 0$, άρα $a = 0$.

4. Βρείτε το όριο της

$$a_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}.$$

Λύση: Έχουμε

$$0 \leq a_n \leq \frac{(2n)2^n}{3^n}.$$

αφού $n/a^n \rightarrow 0$ αν $a > 1$ έχουμε στη συνέχεια αν επιλέξουμε κάποιο αριθμό $\beta \in (2, 3)$ (π.χ. $\beta = 2.5$)

$$0 \leq a_n \leq \frac{2n}{(3/\beta)^n} \cdot \left(\frac{2}{\beta}\right)^n$$

το οποίο τείνει στο 0 αφού και οι δύο παράγοντες τείνουν στο 0. Άρα $a_n \rightarrow 0$.

5. Δείξτε ότι $(n+1)^{1/3} - n^{1/3} \rightarrow 0$.



$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Λύση: Εφαρμόζουμε την υπόδειξη με $a = (n+1)^{1/3}$, $b = n^{1/3}$ και έχουμε

$$(n+1)^{1/3} - n^{1/3} = \frac{(n+1) - n}{(n+1)^{2/3} + (n+1)^{1/3}n^{1/3} + n^{2/3}} \leq \frac{1}{n^{2/3}} \rightarrow 0.$$

6. Δείξτε ότι $a_n = \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$.

Λύση:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} \\
 &\leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lfloor n/2 \rfloor}{\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{\lfloor n/2 \rfloor}} \\
 &\leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{\lfloor n/2 \rfloor} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor} \\
 &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3} \\
 &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

7. Έχουμε $x_1 > 0, x_2 > 0$ και για $n \geq 1$ έχουμε

$$(3) \quad x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n.$$

Δείξτε ότι $\rho_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 2$.

 Βρείτε πρώτα μια αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η ρ_n . Δε μπορείτε να δείξετε ότι η ρ_n είναι μονότονη αλλά μπορείτε να δείξετε ότι οι δύο υπακολουθίες της ρ_{2n} και ρ_{2n+1} είναι μονότονες, άρα και συγκλίνουσες (για να το κάνετε αυτό βρείτε μια αναδρομική σχέση που ικανοποιούν αυτές οι δύο υπακολουθίες). Βρείτε έπειτα τα όρια των ρ_{2n} και ρ_{2n+1} και παρατηρήστε ότι είναι και τα δύο ίσα με 2, άρα $\rho_n \rightarrow 2$.

Λύση: Διαιρούμε την (3) με x_n και παίρνουμε

$$\frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + 2,$$

άρα

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + 2,$$

ή

$$\rho_{n+1}\rho_n = \rho_n + 2,$$

το οποίο γράφουμε ως

$$(4) \quad \rho_{n+1} = 1 + \frac{2}{\rho_n}.$$

Εφαρμόζοντας την (4) δύο φορές παίρνουμε

$$\rho_{n+2} = 1 + \frac{2}{\rho_{n+1}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\rho_n}} = 3 - \frac{4}{\rho_n + 2}$$

μετά από λίγες πράξεις. Από την αναδρομική σχέση τώρα $\rho_{n+2} = 3 - \frac{1}{\rho_{n+2}}$, την οποία ικανοποιούν και η ρ_{2n} και η ρ_{2n+1} , παίρνουμε με επαγωγή ότι και οι δύο αυτές ακολουθίες είναι μονότονες. Το είδος της μονοτονίας (αύξουσα ή φθίνουσα) εξαρτάται από τις αρχικές τιμές x_1 και x_2 . Ας κάνουμε ένα παράδειγμα για να φανεί ότι, π.χ. για την ακολουθία των περιττών δεικτών, όποια κι αν είναι η σχέση ανάμεσα στο ρ_1 και το ρ_3 αυτή διατηρείται και για το επόμενο ζεύγος ρ_3 και ρ_5 κλπ.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\rho_1 \leq \rho_3$. Τότε

$$\rho_1 + 2 \leq \rho_3 + 2 \implies 3 - \frac{4}{\rho_1 + 2} \leq 3 - \frac{4}{\rho_3 + 2} \implies \rho_3 \leq \rho_5.$$

Οι δύο ακολουθίες λοιπόν ρ_{2n} και ρ_{2n+1} συγκλίνουν, επειδή είναι μονότονες.

Αν μια από αυτές τις δύο ακολουθίες έχει πεπερασμένο όριο $x \in \mathbb{R}$ τότε αυτό πρέπει να είναι το 2 αφού ικανοποιεί την εξίσωση

$$x = 3 - \frac{4}{x + 2}$$

η οποία εύκολα βλέπουμε ότι έχει ρίζες τα -1 και 2 , αλλά αφού $\rho_n \geq 0$ έπεται ότι το όριο είναι το 2 .

Μπορεί όμως μια από τις ρ_{2n} και ρ_{2n+1} να έχει όριο $+\infty$. Όχι, γιατί από την $\rho_{n+1} = 1 + \frac{2}{\rho_n}$ που έχουμε δείξει (και η οποία, παρατηρήστε, συνδέει τις τιμές για άρτια n με τις τιμές για περιττά n) φαίνεται ότι αν $\rho_n \rightarrow \infty$ τότε $\rho_{n+1} \rightarrow 1$, που δε γίνεται γιατί έχουμε δείξει ότι αν το όριο είναι πεπερασμένο τότε είναι το 2 . Άρα και οι δύο ρ_{2n} και ρ_{2n+1} έχουν πεπερασμένο όριο, αυτό είναι το 2 , άρα και η ρ_n τείνει στο 2 .

8. Όταν αποδείξαμε ότι μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία x_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό χρησιμοποιήσαμε το ότι υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα της ακολουθίας.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα x της x_n που κανένα άλλο άνω φράγμα δεν είναι μικρότερό του.

Με άλλα λόγια, αν ονομάσουμε B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων της ακολουθίας x_n

$$z \in B \iff \text{το } z \text{ είναι άνω φράγμα της } x_n$$

τότε το σύνολο B έχει ελάχιστο στοιχείο, υπάρχει δηλ. $x \in B$ τέτοιο ώστε

$$z \in B \implies x \leq z.$$

(Δηλ. κάθε άλλο στοιχείο του B είναι μεγαλύτερο ή ίσο του x .)

Δεν έχουν όλα τα σύνολα πραγματικών αριθμών ελάχιστο στοιχείο. Για παράδειγμα το ανοιχτό διάστημα $(1, 2)$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Όποιο στοιχείο $x \in (1, 2)$ και να πάρουμε υπάρχει κάποιο άλλο $y \in (1, 2)$ που να είναι μικρότερο του x (π.χ. $y = (1 + x)/2$, το μέσο του διαστήματος $(1, x)$).

Ποια από τα παρακάτω σύνολα έχουν ελάχιστο στοιχείο και ποιο είναι αυτό;

- (1) $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ (το σύνολο δηλ. όλων των αντιστρόφων των φυσικών αριθμών).
 - (2) $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
 - (3) $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).
-

Λύση:

- (1) Δεν έχει. Όποιο στοιχείο του και να πάρουμε, π.χ. το $1/k$, υπάρχει άλλο στοιχείο του A που είναι μικρότερο, π.χ. το $1/(k+1)$.
 - (2) Το 0 είναι προφανώς ελάχιστο στοιχείο.
 - (3) Δεν έχει. Όποιο στοιχείο του x και να πάρουμε, υπάρχει άλλο στοιχείο του C που είναι μικρότερο, π.χ. το $x/2$, που είναι αυστηρά μικρότερο του x γιατί $x > 0$ αφού $x \in A$.
-

9. Αποδείξτε ότι

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \lfloor 1/x \rfloor = 0, (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor 1/x \rfloor = -1, (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \lceil 1/x \rceil = 1, (d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \lceil 1/x \rceil = 0$$

Λύση: Αν $x > 1$ τότε $0 < \frac{1}{x} < 1$ οπότε $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ και $\lceil 1/x \rceil = 1$ και άρα ισχύουν τα όρια στα (a) και (c) αφού οι συναρτήσεις που δίνονται εκεί είναι τελικά σταθερές.

Ομοίως, αν $x < -1$ τότε $-1 < \frac{1}{x} < 0$ οπότε $\lfloor 1/x \rfloor = -1$ και $\lceil 1/x \rceil = 0$, και άρα ισχύουν τα όρια στα (b) και (d) αφού οι συναρτήσεις εκεί είναι τελικά (όταν κινούμαστε προς το $-\infty$) σταθερές.

10. Υποθέστε ότι $f(x) \neq 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και ας είναι $z \in \mathbb{R}$ ένα σημείο που προσεγγίζεται από τα σημεία του πεδίου ορισμού της f . Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow z} f(x) = 2 \iff \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) + 3}{f(x) - 1} = 5.$$

Λύση: Η κατεύθυνση $\implies$ είναι άμεση συνέπεια των αλγεβρικών ιδιοτήτων του ορίου.

Για την ανάποδη κατεύθυνση, ονομάζουμε

$$g(x) = \frac{f(x) + 3}{f(x) - 1}$$

και παρατηρούμε ότι πάντα $g(x) \neq 1$. Λύνουμε τώρα αυτή τη σχέση ως προς $f(x)$ και προκύπτει ότι

$$f(x) = \frac{g(x) + 3}{g(x) - 1}.$$

Υποθέτοντας ότι $\lim_{x \rightarrow z} g(x) = 5$ και εφαρμόζοντας τις αλγεβρικές ιδιότητες του ορίου και πάλι παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow z} f(x) = 2$.

11. Υπολογίστε τα όρια

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Λύση:

(a) Περιοριζόμαστε σε $x > 0$. Ισχύει $2x - 1 \leq \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ άρα

$$\frac{2x - 1}{x} \leq \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x} \leq \frac{2x}{x} = 2$$

και, παρατηρώντας ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$ παίρνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2x \rfloor}{x} = 2$.

(b) Περιοριζόμαστε σε $x > 0$. Ισχύει $0 \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$ άρα

$$0 \leq \frac{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0,$$

άρα το όριο είναι 0.

(c) Για $x > 0$ έχουμε $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq \frac{1}{x} - 1 \rightarrow +\infty$ άρα το όριο είναι $+\infty$.

12. (a) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ώ. αν $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $x \neq a$ τότε $f(x) < g(x)$.

(b) Αν υποθέσουμε απλά ότι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ δείξτε ότι δε μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι $f(x) \leq g(x)$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a .

Λύση: (a) Έστω $F = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ και $G = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Ορίζουμε $\delta = G - F > 0$.

Αφού $f(x) \rightarrow F$ για $x \rightarrow a$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - F| < \delta/10.$$

Επίσης, αφού $g(x) \rightarrow G$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ τ.ώ.

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - G| < \delta/10.$$

Παίρνουμε $\epsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν $0 < |x - a| < \epsilon$ ισχύει η υπόθεση σε κάθε μια από τις δύο παραπάνω συνεπαγωγές και άρα ισχύει

$$|f(x) - F| < \delta/10, \quad |g(x) - G| < \delta/10.$$

Από αυτές τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f(x) < g(x)$.

(b) Αρκεί να δώσουμε ένα παράδειγμα όπου η ισχύει η υπόθεση

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

χωρίς να ισχύει η ανισότητα $f(x) \leq g(x)$ σε κανένα διάστημα γύρω από το a . Πάρτε π.χ. $f(x) = (x-a)^2$ και $g(x) = -(x-a)^2$.