

Απειροστικός Λογισμός Ι - Φθινόπωρο 2026-27- Φυλλάδιο
Ασκήσεων **1** - Μιχάλης Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθήστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: **21 Σεπτεμβρίου 2026**

1. Αν $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ και $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η ακολουθία $s_n = x_n + y_n$ τείνει στο $x + y$.

2. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες;

(1) $a_n =$ το πλήθος των διαιρετών του φυσικού αριθμού n

(2) $b_n =$ πόσοι πρώτοι αριθμοί είναι $\leq n$

(3) $c_n =$ με πόσους τρόπους μπορεί να γραφτεί ο n ως $n = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2$ όπου

(1) $r \geq 1$ και $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r$.

Με άλλα λόγια, το c_n μετράει με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να γράψουμε το n ως άθροισμα κάποιων τετραγώνων φυσικών αριθμών, όπου τους προσθετούς τους γράφουμε πάντα σε αύξουσα σειρά.

3. Εξηγήστε γιατί δεν έχει νόημα να λέμε ότι μια ακολουθία είναι «τελικά φραγμένη». Με άλλα λόγια, γιατί μια ακολουθία που είναι τελικά φραγμένη (ορίστε το πρώτα) είναι αναγκαστικά φραγμένη.

4.

(1) Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο άνω φραγμένων ακολουθιών είναι άνω φραγμένο. (Ομοίως για κάτω φραγμένες και για φραγμένες.)

(2) Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο ακολουθιών που είναι **τελικά** αύξουσες (φθίνουσες) είναι **τελικά** αύξουσα (φθίνουσα).

5. Αποδείξτε ότι $x_n \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν κάθε πραγματικός αριθμός M είναι τελικά κάτω φράγμα της x_n .¹

¹Ενώ δεν έχει νόημα, όπως λέμε στην άσκηση 3 παραπάνω, να πούμε ότι μια ακολουθία «είναι τελικά κάτω φραγμένη» έχει νόημα να πούμε ότι «ο αριθμός M είναι τελικά κάτω φράγμα» μιας ακολουθίας. Αυτό σημαίνει απλά ότι αν αγνοήσουμε ένα αρχικό κομμάτι της ακολουθίας τότε όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι $\geq M$.

6. Ο ορισμός του ορίου $x_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ είναι ο

$$(2) \quad \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \epsilon).$$

Εξηγήστε γιατί ο ορισμός δεν αλλάζει αν η τελευταία γνήσια ανισότητα « $< \epsilon$ » γίνει « $\leq \epsilon$ ».

7. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι $a_n = n^2 - 10n \rightarrow +\infty$.

8. Αν $a_n \in \mathbb{Z}$ και $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η a_n είναι τελικά σταθερή και ίση με a (άρα $a \in \mathbb{Z}$).

9. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικά πραγματικά όρια. Δηλ. αν $a_n \rightarrow a$ και $a_n \rightarrow b$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, τότε $a = b$.

10. Έστω ότι οι ακολουθίες a_n, b_n διαφέρουν σε πεπερασμένο μόνο πλήθος όρων.

(1) Δείξτε ότι $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $b_n \rightarrow L$.

(2) Δείξτε ότι η a_n είναι φραγμένη αν και μόνο αν η b_n είναι φραγμένη.

(3) Αν η a_n είναι αύξουσα, είναι αναγκαστικά και η b_n αύξουσα; Είναι τελικά αύξουσα;

11. Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες, $n \geq 1$, εξετάστε αν είναι αύξουσα, φθίνουσα ή ούτε το ένα ούτε το άλλο, και αν είναι άνω ή κάτω φραγμένη. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

$$(1) \quad a_n = \frac{n}{n+1}.$$

$$(2) \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$(3) \quad c_n = n + (-1)^n.$$

$$(4) \quad d_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}.$$

12.

(1) Αν οι a_n, b_n είναι μη αρνητικές και αύξουσες, δείξτε ότι η $a_n b_n$ είναι αύξουσα.

(2) Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση ότι οι όροι είναι μη αρνητικοί;

(3) Αν η $a_n + b_n$ είναι αύξουσα, πρέπει τουλάχιστον μία από τις a_n, b_n να είναι τελικά αύξουσα;

13.

(1) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας που δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν τείνει στο $+\infty$.

(2) Δείξτε ότι, αν μια αύξουσα ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε τείνει στο $+\infty$.

(3) Διατυπώστε και αποδείξτε την αντίστοιχη πρόταση για φθίνουσες ακολουθίες και το $-\infty$.

14. Έστω $a_n > 0$ για κάθε n . Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow +\infty$ αν και μόνο αν $1/a_n \rightarrow 0$. Ισχύει η συνεπαγωγή από δεξιά προς τα αριστερά αν υποθέσουμε μόνο ότι $a_n \neq 0$ αντί για $a_n > 0$;
15. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a_{2n} \rightarrow L$ και $a_{2n-1} \rightarrow L$. Αν οι ακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, μπορεί η a_n να συγκλίνει;