Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Πρώτο Διαγώνισμα – 19 Οκτωβρίου 2026 *** Διάρκεια 2 ώρες
Όνομα, Επώνυμο, ΑΜ:

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

---

1. Ορίζουμε $a_n = \dfrac{n}{2-n^2}$, για $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι $a_n \to 0$ χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ορίου ακολουθίας.

Λύση: Για $n \geq 2$ έχουμε $n^2 - 2 \geq n^2/2$, και επομένως

$$|a_n - 0| = \frac{n}{n^2-2} \leq \frac{2}{n}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό $N > \max\{2, 2/\varepsilon\}$. Τότε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $|a_n| \leq 2/n \leq 2/N < \varepsilon$. Αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της σύγκλισης της a_n στο 0.

2. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{-3x^2+2x+\sin x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}.$$

Λύση: Στο πρώτο κλάσμα διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με x^2:

$$\frac{x^2+x+1}{-3x^2+2x+\sin x} = \frac{1+1/x+1/x^2}{-3+2/x+(\sin x)/x^2} \longrightarrow -\frac{1}{3}.$$

Πράγματι, $1/x, 1/x^2 \to 0$ και $|\sin x/x^2| \leq 1/x^2 \to 0$. Στο δεύτερο κλάσμα διαιρούμε με e^{2x}:

$$\frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1} = \frac{e^{-x}+e^{-2x}}{1+e^{-x}+e^{-2x}} \longrightarrow 0,$$

αφού $e^{-x}, e^{-2x} \to 0$ όταν $x \to +\infty$.

3. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = \lfloor x \rfloor$ συνεχής;

Λύση: Αν $x_0 \notin \mathbb{Z}$, υπάρχει ακέραιος k με $k < x_0 < k+1$. Σε μια περιοχή του x_0 ισχύει $\lfloor x \rfloor = k$, οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0. Αν όμως $x_0 = k \in \mathbb{Z}$, τότε για $k-1 < x < k$ έχουμε $\lfloor x \rfloor = k-1$, ενώ $\lfloor k \rfloor = k$. Επομένως

$$\lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1 \neq k = f(k),$$

και η f δεν είναι συνεχής στο k. Άρα τα σημεία συνέχειας είναι ακριβώς τα $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Έστω $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$, που έχει ως πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από όποια σημεία μηδενίζουν τον παρανομαστή. Για κάθε $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ βρείτε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και υπολογίστε το.

Λύση: Ο παρανομαστής μηδενίζεται στα $x = -2$ και $x = 1$. Για $x \neq -2, 1$ παραγοντοποιούμε και απλοποιούμε:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, από τη συνέχεια της τελευταίας παράστασης στο x_0 προκύπτει $\lim_{x\to x_0} f(x) = (x_0+3)/(x_0+2)$. Ιδιαίτερα, στο $x_0 = 1$ το όριο υπάρχει και ισούται με $4/3$, παρόλο που η $f(1)$ δεν ορίζεται. Στο $x_0 = -2$ έχουμε $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, άρα δεν υπάρχει όριο εκεί. Τέλος, επειδή $1/(x+2) \to 0$ καθώς $x \to \pm\infty$, και στα δύο άπειρα το όριο είναι 1.

5. Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0) = 1, f(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον

$$g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0, \qquad g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0.$$

Άρα ο αριθμός 0 βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $g(0)$ και $g(1)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x \in (0,1)$ με $g(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = x$, όπως ζητήθηκε.

6. Έστω $x_1 = x_2 = 1$ και υποθέστε επίσης για κάθε n ισχύει

$$\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}.$$

Δείξτε ότι η x_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to 0$.

Λύση: Θέτουμε $y_n = 1/x_n$. Από τα δεδομένα προκύπτει

$$y_1 = y_2 = 1, \qquad y_{n+2} = y_{n+1} + y_n.$$

Με επαγωγή, κάθε $y_n \geq 1$: αυτό ισχύει αρχικά, ενώ το άθροισμα δύο όρων που είναι τουλάχιστον 1 είναι επίσης τουλάχιστον 1. Έτσι $y_{n+2} > y_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως η y_n είναι μη φθίνουσα, και η $x_n = 1/y_n$ είναι μη αύξουσα (μάλιστα γνησίως φθίνουσα από τον τρίτο όρο και μετά). Επίσης $x_n > 0$, άρα η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από το 0, συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο $x \geq 0$. Αν $x > 0$ τότε $1/x_n \to 1/x$ και παίρνοντας όρια στην ισότητα

$$\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}.$$

παίρνουμε $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ ή $\frac{1}{x} = 0$, άτοπο, άρα $x = 0$.