

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως αντιγραφή.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Ενδιάμεσο Διαγώνισμα - 19 Νοεμβρίου 2025

Διάρκεια: 2 ώρες

1. Δείξτε ότι στο γραμμικό χώρο συναρτήσεων

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f' \text{ υπάρχει και είναι συνεχής, } f(0.1) + f(0.2) = 0\}$$

η ποσότητα $\|f\| = \int_0^1 |f'(x)| dx$ είναι νόρμα.

2. Έστω X γραμμικός χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X . Ας είναι $x \in X$ και $y_1, \dots, y_n \in Y$ βέλτιστες προσεγγίσεις του x από το χώρο Y . Αν $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n$ και $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ δείξτε ότι και το στοιχείο $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \in Y$ είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από το χώρο Y .

3. Ας είναι $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a < b < c < d$ και έστω X ο γραμμικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων $[a, b] \cup [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ και Y ο γραμμικός υπόχωρος του X που αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις που είναι ταυτοτικά ίσες με το 0 στο διάστημα $[a, b]$.

Η νόρμα που θεωρούμε πάνω στον X είναι η $\|\cdot\|_\infty$.

Δείξτε ότι υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση των στοιχείων του X από στοιχεία του Y . Είναι μοναδική;

4. Αν $T_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Chebyshev δείξτε ότι $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (όχι μόνο για $-1 \leq x \leq 1$).

5. Ας είναι $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ μια άρτια συνάρτηση και έστω το σύνολο σημείων $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq [-1, 1]$ που είναι τέτοιο ώστε

$$x \in X \iff -x \in X.$$

Αν $p(x)$ έχει $\deg p \leq n-1$ και $p(x_j) = f(x_j)$ για $j = 1, \dots, n$ δείξτε ότι οι συντελεστές περιττού βαθμού του $p(x)$ είναι όλοι 0.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και 2π -περιοδική συνάρτηση. Αν f'' υπάρχει παντού και είναι επίσης συνεχής και 2π -περιοδική δείξτε την ανισότητα

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\|f''\|_1}{n^2}.$$

Τι συμπεραίνετε για τη σύγκλιση ή μη της σειράς Fourier της f ;