

Ομάδα ασκήσεων Νο 8

Πρόβλημα 1. Αν $f \in C^{2\pi}$ και $N \in \mathbb{N}$ βρείτε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(Nx)$ μέσω αυτών της $f(x)$.

Πρόβλημα 2. (α) Αν $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots, N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ δείξτε τον πολύ χρήσιμο τύπο της άθροισης κατά μέρη (που είναι το ανάλογο για αθροίσματα του τύπου της ολοκλήρωσης κατά μέρη)

$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

(β) Αν $a_n \rightarrow 0$ είναι φθίνουσα ακολουθία και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n$ είναι φραγμένα τότε η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n τον τύπο του Leibniz για την πολλαπλή παραγωγή γινομένου συναρτήσεων (χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $D = \frac{d}{dx}$ για συντομία στη γραφή):

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g.$$

Πρόβλημα 4. (α) Έστω f πολώνυμο βαθμού $\leq n$. Δείξτε ότι γράφεται στη μορφή

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

(β) Αν $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό πολώνυμο $f(x)$ βαθμού $\leq n$ με $f^{(j)}(0) = d_j$, για $j = 0, 1, \dots, n$.