

Ομάδα ασκήσεων Νο 5

Πρόβλημα 1. Δείξτε

$$T_m(x) \cdot T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x))$$

για $m > n$.

Πρόβλημα 2. Δείξτε

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x).$$

Πρόβλημα 3. Δείξτε

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right).$$

Πρόβλημα 4. Το υπερβολικό συνημίτονο είναι η συνάρτηση $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Δείξτε

$$T_n(\cosh x) = \cosh(nx).$$

Πρόβλημα 5. Βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $T_n(x)$ και δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες του $T_n(x)$ υπάρχει ακριβώς μία ρίζα του $T_{n-1}(x)$ και ότι τα $T_n(x), T_{n-1}(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες.

Πρόβλημα 6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

για όλες τις τιμές των m, n .

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι για $-1 \leq x \leq 1$ ισχύει η ανισότητα

$$|T'_n(x)| \leq n^2.$$