

Ομάδα ασκήσεων Νο 5

Πρόβλημα 1. Η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, με $[a, b] \subseteq (0, 2\pi)$, έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|f' - p'\|_\infty \leq \epsilon.$$

Αν $[a, b] = [0, 2\pi]$ τι επιπλέον συνθήκες χρειάζονται για την f ώστε να ισχύει αυτή η πρόταση;

Πρόβλημα 2. Αν $p(x)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $\tau \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι και η συνάρτηση $q(x) = p(x + \tau)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Πρόβλημα 3. Έστω $p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p(x) = \sum_{k=-N}^N p_k e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η παράγωγός του, $p'(x)$, είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε το βαθμό και τους συντελεστές του.

Πρόβλημα 4. Έστω $p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p(x) = \sum_{k=-N}^N p_k e^{ikx}$$

με $p_0 = 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $P(x) = \int_0^x p(t) dt$ είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε τους συντελεστές του. Γιατί είναι απαραίτητη η συνθήκη $p_0 = 0$;

Πρόβλημα 5. Έστω $p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p(x) = \sum_{k=-N}^N p_k e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{k=-N}^N |p_k|^2 \leq \max_{x \in [0, 2\pi]} |p(x)|^2 \leq \sum_{k=-N}^N |p_k|^2 (2N + 1).$$