Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισης και εφαρμογες, Φθινοπωρο 2025-26, Μιχ. Κολουντζακης

Ομάδα ασκήσεων Νο 2

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι για κάθε n υπάρχουν πολυώνυμα (δύο μεταβλητών) $p_n(x, y)$ και $q_n(x, y)$ τέτοια ώστε για κάθε θ

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{και} \quad \sin n\theta = q_n(\cos\theta, \sin\theta).$$

Επαγωγή ως προς n. $p_1(x, y) = x, q_1(x, y)) = y$. Επίσης $e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta}e^{in\theta}$.

Πρόβλημα 2. Δύο συναρτήσεις $f, g \in C([a, b])$ ονομάζονται μεταξύ τους *ορθογώνιες* αν

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx = 0.$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1, \cos\left(2\pi n(b-a)^{-1}x\right), \sin\left(2\pi n(b-a)^{-1}x\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

είναι ανά δύο ορθογώνιες.

Το ίδιο και για τις συναρτήσεις

$$e^{\frac{2\pi i}{b-a}nx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Αποδείξτε πρώτα το τελευταίο ερώτημα στο οποίο οι υπολογισμοί είναι πολύ ευκολότεροι. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τη βασική σχέση

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

εκφράστε κάθε μια από τις συναρτήσεις στην (1) ως γραμμικό συνδυασμό κάποιων συναρτήσεων στην (2) και χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου για να αποδείξετε την ορθογωνιότητα των (1).

Πρόβλημα 3. Σε ένα μετρικό χώρο X ένα σύνολο F λέγεται κλειστό αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων του συγκλίνει μέσα στο F. Ένα σύνολο K λέγεται συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του K. Δείξτε ότι αν F κλειστό, K συμπαγές και $F \subseteq K$ τότε και F συμπαγές (δηλ. *κλειστά υποσύνολα συμπαγών είναι συμπαγή*).

Πρόβλημα 4. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση e^x δε μπορεί να ταυτίζεται με κάποιο πολυώνυμο σε όλα τα σημεία ενός διαστήματος.
(β) Δείξτε επίσης ότι η e^x δε μπορεί να ταυτίζεται με κάποιο πολυώνυμο $p(x)$ για όλα τα σημεία μιας ακολουθίας $x_n \in \mathbb{R}$ που συγκλίνει στο $+\infty$ (ομοίως αν συγκλίνει στο $-\infty$).
(γ) (Δυσκολότερο) Αν $\mathbb{R} \ni x_n \to 0$ και η x_n δεν είναι τελικά ίση με το 0 δείξτε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $p(x_n) = e^{x_n}$ για όλα τα n.

Για το (γ) θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - p(x)$ και υποθέστε, αντίθετα με αυτό που ζητάει η άσκηση, ότι $f(x_n) = 0$ για κάθε n. Μπορείτε εύκολα να περιοριστείτε στην περίπτωση όπου η x_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία με όριο το 0. Από το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα (x_{n+1}, x_n) προκύπτει ότι υπάρχει ένα σημείο ξ_n μέσα σε κάθε τέτοιο διάστημα όπου $f'(\xi_n) = 0$. Κάντε επανειλημμένη χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής ξεκινώντας από τη νέα αυτή ακολουθία σημείων ξ_n.

Πρόβλημα 5. Ας είναι $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $a < b < c < d$ και έστω X ο γραμμικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων $[a, b] \cup [c, d] \to \mathbb{C}$ και Y ο γραμμικός υπόχωρος του X που αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις που είναι ταυτοτικά ίσες με το 0 στο διάστημα $[a, b]$.
(α) Η νόρμα που θεωρούμε πάνω στον X είναι η $\|\cdot\|_\infty$. Υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση των στοιχείων του X από στοιχεία του Y; Είναι μοναδική;
(β) Ίδιο ερώτημα αλλά με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$.