Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

1 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι είναι φραγμένη στο $(0, 1)$.

Λύση: Αφού f ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$. Ας είναι $n \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $\frac{1}{n} < \delta$. Χωρίζουμε το $(0, 1)$ σε n ίσα διαστήματα μήκους $1/n$ και ονομάζουμε $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$ κλπ. Έχουμε λοιπόν $|f(x_2) - f(x_1)| \le 1$ και άρα $|f(x_2)| \le |f(x_1)| + 1$. Ομοίως δείχνουμε $|f(x_3)| \le |f(x_2)| + 1 \le |f(x_1)| + 2$, κλπ, $|f(x_k)| \le |f(x_1)| + (k - 1)$, για $k = 2, 3, \ldots, n - 1$. Άρα για κάθε j έχουμε $|f(x_j)| \le |f(x_1)| + n$. Αν τώρα $x \in (0, 1)$ τότε το x ανήκει σε κάποιο από τα διαστήματα της διαμέρισης οπότε εφαρμόζοντας ακόμη μια φορά την ιδιότητα της ομοιόμορφης συνέχειας έχουμε ότι $|f(x)| \le |f(x_1)| + n + 1$ το οποίο είναι και το φράγμα της f.

2 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ για $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η h είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$.

Λύση: Ας είναι $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Έχουμε για $x \le y$

$$|h(y) - h(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le \int_x^y M\,dt = M|x - y|.$$

Έπεται ότι η h είναι Lipschitz με σταθερά M, άρα και ομοιόμορφα συνεχής.

3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$. Είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Δείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Από την υπόθεσή μας υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τ.ώ. αν $x, y \le 0$ και $|x - y| \le \delta_1$ τότε έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \le \epsilon/2$ και επίσης αν $x, y > 0$ και $|f(x) - f(y)| \le \delta_2$ τότε έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \le \epsilon/2$. Αν πάρουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ τότε αν x, y ομόσημα (ή 0) και $|x - y| \le \delta$ έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \le \epsilon/2 \le \epsilon$. Αν x, y ετερόσημα και $|x - y| \le \delta$ τότε έχουμε και $|x - 0| \le \delta$ και $|y - 0| \le \delta$, άρα έχουμε $|f(x) - f(0)| \le \epsilon/2$ και $|f(y) - f(0)| \le \epsilon/2$. Άρα

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| \le \epsilon/2 + \epsilon/2 \le \epsilon.$$

4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη. Ορίζουμε $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ για $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Αφού f συνεχής έχουμε από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απ. Λογισμού ότι παντού $g' = f$. Αφού η f είναι φραγμένη έπεται ότι η g έχει φραγμένη παράγωγο, άρα είναι Lipschitz και ομοιόμορφα συνεχής.

Η ίδια άσκηση θα μπορούσε να έχει τεθεί χωρίς να υποθέσουμε συνέχεια της f αλλά μόνο ότι είναι φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα. Τότε η απόδειξη είναι ίδια με την Άσκηση 2 παραπάνω.