

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 8 -
Μ. Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέрте αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 3 Απριλίου 2026

1 Αν είναι X ο χώρος όλων των ακολουθιών αριθμών που συγκλίνουν απόλυτα

$$X = \left\{ (a_1, a_2, \dots) : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty \right\}$$

και $d(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j - b_j|$, όπου $a, b \in X$, δείξτε ότι η ποσότητα $d(a, b)$ είναι πάντα πεπερασμένη και είναι μετρική στο χώρο X .

2 Ας είναι $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο πόλεων σε μια χώρα Ω . Ανάμεσα σε δύο πόλεις $x, y \in X$ μπορεί να υπάρχει ένας δρόμος που να τις συνδέει (με κάποιο θετικό και πεπερασμένο μήκος). Το δίκτυο των δρόμων που υπάρχουν στη χώρα Ω είναι τέτοιο που μπορεί κανείς να πάει (διανύοντας κάποιους από τους δρόμους αυτούς), από οποιαδήποτε πόλη $x \in X$ σε οποιαδήποτε άλλη πόλη $y \in X$. Ορίζουμε για δύο πόλεις x, y

$$d(x, y) = \begin{array}{l} \text{το ελάχιστο μήκος που χρειάζεται να} \\ \text{διανύσουμε για να πάμε από την πόλη } x \text{ στην πόλη } y. \end{array}$$

(Όλοι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης.) Δείξτε ότι η συνάρτηση $d(\cdot, \cdot)$ είναι μετρική στο X .

3 Έστω Σ ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο ονομάζουμε αλφάβητο και τα στοιχεία του γράμματα. Μια λέξη είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ από γράμματα $w_j \in \Sigma$, της οποίας το μήκος είναι ο αριθμός $n \in \{0, 1, \dots\}$. Ας είναι X_N το σύνολο όλων των λέξεων με γράμματα από το Σ και μήκος ακριβώς N . Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$d_H(w, v) = |\{j : w_j \neq v_j\}|,$$

για κάθε δύο λέξεις $w, v \in X_N$ (με άλλα λόγια, το $d_H(w, v)$ είναι το πλήθος των θέσεων όπου διαφέρουν οι δύο λέξεις w, v). Δείξτε ότι η $d_H(\cdot, \cdot)$ είναι μετρική στο X_N .

4 Ας είναι $\Gamma = \{A, C, G, T\}$ και X το σύνολο όλων των μορίων DNA (λέξεις από γράμματα του Γ οποιουδήποτε πεπερασμένου μήκους – δείτε το Πρόβλημα 3). Αν $w \in X$ είναι ένα μόριο, τότε μια πράξη πάνω στο μόριο είναι ένα από τα παρακάτω: (α) διαγραφή ενός γράμματος, (β) προσθήκη ενός γράμματος (μέσα στο μόριο ή στα άκρα), (γ) αλλαγή ενός γράμματος του μορίου σε ένα άλλο. Αν $w, v \in X$ είναι δύο μόρια ορίζουμε

$$d(w, v) = \begin{array}{l} \text{ο ελάχιστος αριθμός πράξεων που χρειάζονται} \\ \text{για να μετατραπεί το μόριο } w \text{ στο μόριο } v. \end{array}$$

Δείξτε ότι $d(w, v)$ είναι πάντα ένας πεπερασμένος αριθμός (κάθε μόριο δηλ. μπορεί να μετατραπεί σε οποιοδήποτε άλλο με πεπερασμένες στο πλήθος πράξεις) και επίσης ότι είναι μετρική πάνω στο X .