Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 26 Μαρτίου 2026

Οι ασκήσεις αυτές είναι ειδικά φτιαγμένες για να σας θεραπεύσουν από την πολύ διαδεδομένη και επικίνδυνη ασθένεια της «τυπολατρείας». Με άλλα λόγια αν προσπαθήσετε να τις λύσετε ψάχνοντας για ακολουθίες ή συναρτήσεις που να δίνονται από κάποιο τύπο τότε σχεδόν σιγουρα θα αποτύχετε. Είναι εύκολες ασκήσεις αν επιτρέψετε στον εαυτό σας να σκεφτεί πιο ελεύθερα έξω από τα δεσμά των τύπων.

1 Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής $f : [0, 10] \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f = 1, \text{ και } \int_2^5 f = 3, \text{ και } \int_6^7 = 1, \text{ και } \int_0^{10} f = 100.$$

2 Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f < \infty,$$

με $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, και με $f(x) > 0$ για κάθε $x \ge 0$.

3 Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n = 1$ για κάθε n και επίσης

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ και } \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

4 Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ είναι αριθμήσιμο, ότι υπάρχει δηλ. μια ακολουθία

$$p_n \in \mathbb{Z}^2, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}^2$ να ισούται με p_n για κάποιο n.

5 Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $x_n \to 0$ και επίσης να μην υπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ώστε η x_n να είναι φθίνουσα για $n \ge n_0$. Η ακολουθία x_n δεν πρέπει να είναι δηλαδή τελικά φθίνουσα.

6 Δείξτε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $M > 0$ να υπάρχει διάστημα μήκους $\ge M$ στο οποίο η f να είναι φθίνουσα και επίσης η f να μην είναι αύξουσα σε κανένα διάστημα μήκους > 2.

7 Ας είναι $A = [1, 2] \cup [4, 6]$. Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in \mathbb{R}$ που να έχει ως σημεία συσσώρευσης ακριβώς τα σημεία του συνόλου A.

8 Δείξτε ότι υπάρχει μια επιλογή προσήμων $\epsilon_n = \pm 1$ τέτοια ώστε τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$ να έχουν ως σημεία συσσώρευσης ακριβώς τους αριθμούς στο διάστημα $[-50, 100]$.