Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

1 Αν $g, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και η $g(x)$ είναι φραγμένη δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Λύση: Ας πούμε ότι $|g(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έστω $f = \sum_n f_n$ με τη σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη. Δείχνουμε ότι $gf = \sum_n gf_n$ με τη σύγκλιση και πάλι να είναι ομοιόμορφη. Αν $s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} g(x)f_n(x)$ είναι το μερικό άθροισμα της τελευταίας σειράς έχουμε

$$|s_N(x) - g(x)f(x)| = \left| g(x) \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right) \right| \le M \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right|.$$

Η τελευταία απόλυτη τιμή πηγαίνει ομοιόμορφα στο 0 γιατί είναι η διαφορά του μερικού αθροίσματος της σειράς $\sum_n f_n$ από τη συνάρτηση-άθροισμα της σειράς f και η σύγκλιση αυτής της σειράς έχει υποτεθεί ομοιόμορφη. Άρα και η ποσότητα $|s_N(x) - g(x)f(x)|$ τείνει ομοιόμορφα στο 0, που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

2 Ποια η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n,\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!,\ \sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n;$$

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης σε κάθε μια από τις παραπάνω αποφανθείτε επίσης για το αν η σειρά συγκλίνει ή όχι για $x = \pm R$.

Λύση: Οι 4 πρώτες σειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης το 1. Το μόνο που χρειάζεται κανείς γι' αυτό τον υπολογισμό είναι το ότι $n^{1/n} \to 1$ για $n \to \infty$. Για τις τελευταίες 3 σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

(που ισχύει όταν υπάρχει το όριο). Εύκολα προκύπτει έτσι ότι η ακτίνα σύγκλισης για τις τελευταίες 3 σειρές είναι $+\infty, +\infty, 0$.

Για να δούμε τη σύγκλιση της κάθε σειράς στα άκρα (εκτός από τις Νο 5 και 6 που το διάστημα σύγκλισης είναι όλο το $\mathbb{R}$) ελέγχουμε τη σύγκλιση της σειράς για $x = \pm 1$ (4 πρώτες σειρές) και $x = 0$ (τελευταία σειρά). Είναι φανερό ότι για την τελευταία σειρά έχουμε σύγκλιση. Για την πρώτη σειρά έχουμε μη σύγκλιση και στα δύο άκρα (σειρές: $\sum_n (-1)^n$ και $\sum_n 1$), για τη δεύτερη σειρά έχουμε σύγκλιση μόνο στο αριστερό άκρο (σειρές: $\sum_n (-1)^n/n$ και $\sum_n 1/n$), για την τρίτη σειρά έχουμε μη σύγκλιση και στα δύο άκρα (σειρές: $\sum_n (-1)^n n$ και $\sum_n n$), και για την τέταρτη σειρά έχουμε σύγκλιση και στα δύο άκρα (σειρές: $\sum_n (-1)^n/n^2$ και $\sum_n 1/n^2$).

3 Σε ποια διαστήματα $[a, b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-1)^n$;

Λύση: Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-1)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} (2x-2)^n.$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_n y^n$ ξέρουμε ότι συγκλίνει ομοιόρφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[-1, 1]$ και μόνο σε αυτά τα κλειστά διαστήματα. Συγκλίνει δηλ. ομοιόμορφα για $a \le y \le b$, όπου $-1 < a \le b < 1$. Θέτοντας $y = 2x - 1$ παίρνουμε $a \le 2x - 1 \le b$ και λύνοτας ως προς x παίρνουμε $1 + \frac{a}{2} \le x \le 1 + \frac{b}{2}$. Όταν $-1 < a < 1$ η ποσότητα $1 + a/2$ παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $(1/2, 3/2)$, και η ποσότητα $1 + \frac{b}{2}$ ομοίως παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο ίδιο διάστημα (αλλά τουλάχιστον όσο και το $1+\frac{a}{2}$). Το συμπέρασμα είναι ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στα κλειστά υποδιαστήματα $[a,b] \subseteq (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

4 Αποδείξτε ότι αν μια δυναμοσειρά έχει ακέραιους συντελεστές και άπειροι από αυτούς δεν είναι 0, τότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι ≤ 1.

Λύση: Ας είναι $\sum_n a_n(x-c)^n$ μια τέτοια δυναμοσειρά. Έχουμε δηλ. $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε n και η a_n δεν είναι τελικά μηδενική. Τότε, αν περιοριστούμε στην υπακολουθία της a_n με τους μη μηδενικούς όρους έχουμε $|a_n|^{1/n} \ge 1^{1/n} = 1$, άρα $\limsup |a_n|^{1/n} \ge 1$ οπότε $R \le 1$.

5 Αν X είναι ένας χώρος με μετρική d_X και Y είναι ένας χώρος με μετρική d_Y δείξτε ότι αν ορίσουμε, στο χώρο $X \times Y$, τη συνάρτηση

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2), \tag{1}$$

τότε αυτή είναι μια μετρική στο χώρο $X \times Y$ (ελέγξτε δηλ. ότι αυτή ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα). Δείξτε το ίδιο για τη συνάρτηση

$$d'((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}. \tag{2}$$

Λύση: Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις d και d' που ορίζονται παραπάνω ικανοποιούν τα αξιώματα της μετρικής.

Ας είναι $d(x,y)=0$. Τότε από την (1) έπεται ότι $d_X(x_1,x_2) = d_Y(y_1,y_2) = 0$. Αφού οι d_X, d_Y είναι μετρικές έπεται ότι $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, ή, με άλλα λόγια, ότι $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ (αφού το να είναι δύο διατεταγμένα ζεύγη ίσα σημαίνει ακριβώς ότι οι πρώτες τους συνεταγμένες είναι ίσες και οι δεύτερες επίσης ίσες).

Ομοίως, αν $d'(x,y) = 0$ έπεται από την (2) ότι $d_X(x_1,x_2) = d_Y(y_1,y_2) = 0$, και, όπως ακριβώς στο προηγούμενο, έχουμε $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

Η συμμετρία $d(x,y) = d(y,x)$, $d'(x,y) = d'(y,x)$ είναι προφανής και στις δύο περιπτώσεις (1), (2).

Δείχνουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα για την (1). Για οποιαδήποτε τρία σημεία του χώρου $X \times Y$:

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) \\
&\le d_X(x_1,x_3) + d_X(x_3,x_2) + d_Y(y_1,y_3) + d_Y(y_3,y_2) \quad \text{(τριγωνικές ανισότητες για τις } d_X, d_Y\text{)} \\
&= (d_X(x_1,x_3) + d_Y(y_1,y_3)) + (d_X(x_3,x_2) + d_Y(y_3,y_2)) \\
&= d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2)).
\end{aligned}$$

Για την (2) πρέπει να δείξουμε

$$\max d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2) \le d'((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d'((x_3,y_3),(x_2,y_2)),$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι καθένας από τους δύο όρους που συμμετέχουν στο max είναι $\le$ από το δεξί μέλος. Το δείχνουμε για τον πρώτο όρο (ο άλλος είναι εντελώς αντίστοιχος).

$$\begin{aligned}
d_X(x_1,x_2) &\le d_X(x_1,x_3) + d_X(x_3,x_2) \quad \text{(τριγωνική ανισότητα για τη μετρική } d_X\text{)} \\
&\le \max d_X(x_1,x_3), d_Y(y_1,y_3) + \max d_X(x_3,x_2), d_Y(y_3,y_2) \\
&= d'((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d'((x_3,y_3),(x_2,y_2)).
\end{aligned}$$

6 Στο χώρο $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$d_w(x,y) = \sum_{j=1}^{d} w_j |x_j - y_j|.$$

Εδώ $w = (w_1, \ldots, w_d)$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα με $w_j > 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$, και $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d)$ είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεία (διανύσματα) του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η $d_w(\cdot, \cdot)$ είναι μετρική στο χώρο $\mathbb{R}^d$. Γιατί δεν είναι αποδεκτό το να μηδενίζεται κάποιο από τα w_j; (Με άλλα λόγια, γιατί δε μπορούμε να υποθέσουμε $w_j \geq 0$ αντί για $w_j > 0$ για όλα τα j;)

Ίδιο ερώτημα για τη συνάρτηση $d'_w(x, y) = \max\{w_j|x_j - y_j| : \ j = 1, 2, \ldots, d\}$.

Λύση: Αν $d_w(x, y) = 0$ τότε $\sum_{j=1}^d w_j|x_j - y_j| = 0$ άρα για κάθε $j = 1, 2, \ldots, d$ έχουμε

$$w_j|x_j - y_j| = 0.$$

Αφού $w_j > 0$ έπεται ότι $x_j = y_j$, δηλ. τα διανύσματα x, y είναι ίσα, όπως οφείλαμε να δείξουμε.

Η συμμετρία είναι προφανής για αυτή τη μετρική.

Για την τριγωνική ανισότητα έχουμε, αν $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $j = 1, \ldots, d$,

$$|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j|.$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτήν με w_j (που είναι θετικά, άρα δεν αλλάζει η φορά της ανισότητας), αθροίζουμε για όλα τα $j = 1, 2, \ldots, d$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

Είναι απαραίτητο όλα τα w_j να μην είναι 0. Αν π.χ. $w_1 = 0$ τότε για $x = (1, 0, \ldots, 0)$, $y = (2, 0, \ldots, 0)$ έχουμε $d_w(x, y) = 0$ χωρίς τα x, y να είναι ίσα.

7 Ας είναι X το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[0, 1]$ (εννοείται με πλευρικές παραγώγους στα άκρα). Δείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι μετρική στο X.

$$d(f, g) = |f(0) - g(0)| + \int_0^1 \left|f'(x) - g'(x)\right| dx.$$

Λύση: Ας υποθέσουμε $d(f, g) = 0$. Τότε έχουμε

$$|f(0) - g(0)| = \int_0^1 \left|f'(x) - g'(x)\right| dx = 0.$$

Η συνάρτηση $|f'(x) - g'(x)|$ είναι μη αρνητική και συνεχής άρα είναι παντού 0. Έχουμε λοιπόν $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα $x \in [0, 1]$, άρα $f(x) = g(x) + C$ για μια σταθερά C. Αφού $f(0) = g(0)$ έχουμε $C = 0$ άρα οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Η συμμετρία για τη μετρική αυτή είναι προφανής.

Για την τριγωνική ανισότητα, αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις τότε

$$|f(0) - g(0)| \leq |f(0) - h(0)| + |h(0) - g(0)|,$$

και για κάθε x

$$\left|f'(x) - g'(x)\right| \leq \left|f'(x) - h'(x)\right| + \left|h'(x) - g'(x)\right|.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία και προσθέτοντας την πρώτη παίρνουμε τη ζητούμενη τριγωνική ανισότητα.