

Λύσεις των ασκήσεων

1 Αν $g, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και η $g(x)$ είναι φραγμένη δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Λύση: Ας πούμε ότι $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έστω $f = \sum_n f_n$ με τη σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη. Δείχνουμε ότι $gf = \sum_n gf_n$ με τη σύγκλιση και πάλι να είναι ομοιόμορφη. Αν $s_N(x) = \sum_{n=1}^N g(x)f_n(x)$ είναι το μερικό άθροισμα της τελευταίας σειράς έχουμε

$$|s_N(x) - g(x)f(x)| = \left| g(x) \left(\sum_{n=1}^N f_n(x) - f(x) \right) \right| \leq M \left| \sum_{n=1}^N f_n(x) - f(x) \right|$$

Η τελευταία απόλυτη τιμή πηγαίνει ομοιόμορφα στο 0 γιατί είναι η διαφορά του μερικού αθροίσματος της σειράς $\sum_n f_n$ από τη συνάρτηση-άθροισμα της σειράς f και η σύγκλιση αυτής της σειράς έχει υποτεθεί ομοιόμορφη. Άρα και η ποσότητα $|s_N(x) - g(x)f(x)|$ τείνει ομοιόμορφα στο 0, που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

2 Ποια η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n, \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2, \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!, \sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^n, \sum_{n=1}^{\infty} (n/x)^n$$

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης σε κάθε μια από τις παραπάνω αποφανθείτε επίσης για το αν η σειρά συγκλίνει ή όχι για $x = \pm R$.

Λύση: Οι 4 πρώτες σειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης το 1. Το μόνο που χρειάζεται κανείς γι' αυτό τον υπολογισμό είναι το ότι $n^{1/n} \rightarrow 1$ για $n \rightarrow \infty$. Για τις τελευταίες 3 σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

(που ισχύει όταν υπάρχει το όριο). Εύκολα προκύπτει έτσι ότι η ακτίνα σύγκλισης για τις τελευταίες 3 σειρές είναι $+\infty, +\infty, 0$.

Για να δούμε τη σύγκλιση της κάθε σειράς στα άκρα (εκτός από τις Νο 5 και 6 που το διάστημα σύγκλισης είναι όλο το \mathbb{R}) ελέγχουμε τη σύγκλιση της σειράς για $x = \pm 1$ (4 πρώτες σειρές) και $x = 0$ (τελευταία σειρά). Είναι φανερό ότι για την τελευταία σειρά έχουμε σύγκλιση. Για την πρώτη σειρά έχουμε

μη σύγκλιση και στα δύο άκρα (σειρές: $\sum_n (-1)^n$ και $\sum_n 1$), για τη δεύτερη σειρά έχουμε σύγκλιση μόνο στο αριστερό άκρο (σειρές: $\sum_n (-1)^n/n$ και $\sum_n 1/n$), για την τρίτη σειρά έχουμε μη σύγκλιση και στα δύο άκρα (σειρές: $\sum_n (-1)^n n$ και $\sum_n n$), και για την τέταρτη σειρά έχουμε σύγκλιση και στα δύο άκρα (σειρές: $\sum_n (-1)^n/n^2$ και $\sum_n 1/n^2$).

3 Σε ποια διαστήματα $[a, b]$ συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-1)^n$;

Λύση: Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-1)^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x-2)^n.$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_n y^n$ ξέρουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[-1, 1]$ και μόνο σε αυτά τα κλειστά διαστήματα. Συγκλίνει δηλ. ομοιόμορφα για $a \leq y \leq b$, όπου $-1 < a \leq b < 1$. Θέτοντας $y = 2x - 1$ παίρνουμε $a \leq 2x - 1 \leq b$ και λύνοντας ως προς x παίρνουμε $1 + \frac{a}{2} \leq x \leq 1 + \frac{b}{2}$. Όταν $-1 < a < 1$ η ποσότητα $1 + a/2$ παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $(1/2, 3/2)$, και η ποσότητα $1 + b/2$ ομοίως παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο ίδιο διάστημα (αλλά τουλάχιστον όσο και το $1 + \frac{a}{2}$). Το συμπέρασμα είναι ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στα κλειστά υποδιαστήματα $[a, b] \subseteq (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

4 Αποδείξτε ότι αν μια δυναμοσειρά έχει ακέραιους συντελεστές και άπειροι από αυτούς δεν είναι 0, τότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι ≤ 1 .

Λύση: Ας είναι $\sum_n a_n(x-c)^n$ μια τέτοια δυναμοσειρά. Έχουμε δηλ. $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε n και η a_n δεν είναι τελικά μηδενική. Τότε, αν περιοριστούμε στην υπακολουθία της a_n με τους μη μηδενικούς όρους έχουμε $|a_n|^{1/n} \geq 1^{1/n} = 1$, άρα $\limsup |a_n|^{1/n} \geq 1$ οπότε $R \leq 1$.

5 Αν X είναι ένας χώρος με μετρική d_X και Y είναι ένας χώρος με μετρική d_Y δείξτε ότι αν ορίσουμε, στο χώρο $X \times Y$, τη συνάρτηση

$$(1) \quad d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2),$$

τότε αυτή είναι μια μετρική στο χώρο $X \times Y$ (ελέγξτε δηλ. ότι αυτή ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα). Δείξτε το ίδιο για τη συνάρτηση

$$(2) \quad d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Λύση: Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις d και d' που ορίζονται παραπάνω ικανοποιούν τα αξιώματα της μετρικής.

Ας είναι $d(x, y) = 0$. Τότε από την (1) έπεται ότι $d_X(x_1, x_2) = d_Y(y_1, y_2) = 0$. Αφού οι d_X, d_Y είναι μετρικές έπεται ότι $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, ή, με άλλα λόγια, ότι $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (αφού το να είναι δύο διατεταγμένα ζεύγη ίσα σημαίνει ακριβώς ότι οι πρώτες τους συντεταγμένες είναι ίσες και οι δεύτερες επίσης ίσες).

Ομοίως, αν $d'(x, y) = 0$ έπεται από την (2) ότι $d_X(x_1, x_2) = d_Y(y_1, y_2) = 0$, και, όπως ακριβώς στο προηγούμενο, έχουμε $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Η συμμετρία $d(x, y) = d(y, x)$, $d'(x, y) = d'(y, x)$ είναι προφανής και στις δύο περιπτώσεις (1), (2).

Δείχνουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα για την (1). Για οποιαδήποτε τρία σημεία του χώρου $X \times Y$:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \\ &\leq d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2) + d_Y(y_1, y_3) + d_Y(y_3, y_2) \\ &= (d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3)) + (d_X(x_3, x_2) + d_Y(y_3, y_2)) \\ &= d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Για την (2) πρέπει να δείξουμε

$$\max d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2) \leq d'((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d'((x_3, y_3), (x_2, y_2))$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι καθένας από τους δύο όρους που συμμετέχουν στο \max είναι \leq από το δεξί μέλος. Το δείχνουμε για τον πρώτο όρο (ο άλλος είναι εντελώς αντίστοιχος).

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_2) &\leq d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2) \quad (\text{τριγωνική ανισότητα για τη } d_X) \\ &\leq \max d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3) + \max d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2) \\ &= d'((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d'((x_3, y_3), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

6 Στο χώρο \mathbb{R}^d ορίζουμε τη συνάρτηση

$$d_w(x, y) = \sum_{j=1}^d w_j |x_j - y_j|.$$

Εδώ $w = (w_1, \dots, w_d)$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα με $w_j > 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, d$, και $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d)$ είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεία (διανύσματα) του \mathbb{R}^d . Δείξτε ότι η $d_w(\cdot, \cdot)$ είναι μετρική στο χώρο \mathbb{R}^d . Γιατί δεν είναι αποδεκτό το να μηδενίζεται κάποιο από τα w_j ; (Με άλλα λόγια, γιατί δε μπορούμε να υποθέσουμε $w_j \geq 0$ αντί για $w_j > 0$ για όλα τα j ;))

Ίδιο ερώτημα για τη συνάρτηση $d'_w(x, y) = \max \{w_j |x_j - y_j| : j = 1, 2, \dots, d\}$.

Λύση: Αν $d_w(x, y) = 0$ τότε $\sum_{j=1}^d w_j |x_j - y_j| = 0$ άρα για κάθε $j = 1, 2, \dots, d$ έχουμε

$$w_j |x_j - y_j| = 0.$$

Αφού $w_j > 0$ έπεται ότι $x_j = y_j$, δηλ. τα διανύσματα x, y είναι ίσα, όπως οφείλαμε να δείξουμε.

Η συμμετρία είναι προφανής για αυτή τη μετρική.

Για την τριγωνική ανισότητα έχουμε, αν $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $j = 1, \dots, d$,

$$|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j|.$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτήν με w_j (που είναι θετικά, άρα δεν αλλάζει η φορά της ανισότητας), αθροίζουμε για όλα τα $j = 1, 2, \dots, d$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

Είναι απαραίτητο όλα τα w_j να μην είναι 0. Αν π.χ. $w_1 = 0$ τότε για $x = (1, 0, \dots, 0)$, $y = (2, 0, \dots, 0)$ έχουμε $d_w(x, y) = 0$ χωρίς τα x, y να είναι ίσα.

7 Ας είναι X το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[0, 1]$ (εννοείται με πλευρικές παραγώγους στα άκρα). Δείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι μετρική στο X .

$$d(f, g) = |f(0) - g(0)| + \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx.$$

Λύση: Ας υποθέσουμε $d(f, g) = 0$. Τότε έχουμε

$$|f(0) - g(0)| = \int_0^1 |f'(x) - g'(x)| dx = 0.$$

Η συνάρτηση $|f'(x) - g'(x)|$ είναι μη αρνητική και συνεχής άρα είναι παντού 0. Έχουμε λοιπόν $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα $x \in [0, 1]$, άρα $f(x) = g(x) + C$ για μια σταθερά C . Αφού $f(0) = g(0)$ έχουμε $C = 0$ άρα οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Η συμμετρία για τη μετρική αυτή είναι προφανής.

Για την τριγωνική ανισότητα, αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις τότε

$$|f(0) - g(0)| \leq |f(0) - h(0)| + |h(0) - g(0)|,$$

και για κάθε x

$$|f'(x) - g'(x)| \leq |f'(x) - h'(x)| + |h'(x) - g'(x)|.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία και προσθέτοντας την πρώτη παίρνουμε τη ζητούμενη τριγωνική ανισότητα.