Λύσεις των ασκήσεων

1 Η έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας σε ένα αριθμό επεκτείνεται και σε ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Ας είναι $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Εδώ $i = \sqrt{-1}$, και $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα του z_n (και γράφουμε συνήθως $x_n = \Re z_n, y_n = \Im z_n$). Επίσης γράφουμε $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ για το μέτρο του z_n. Το μέτρο $|z| = \sqrt{|\Re z|^2 + |\Im z|^2}$ του μιγαδικού z έχει όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες που έχει η απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών, π.χ. $|zw| = |z||w|$. Ικανοποιεί επίσης και την τριγωνική ανισότητα $|z + w| \le |z| + |w|$ και άρα η ποσότητα $d(z, w) = |z - w|$ αποτελεί μια μετρική στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Λέμε ότι $z_n \to z \in \mathbb{C}$ (ή $\lim_n z_n = z$) αν $|z_n - z| \to 0$ (προσέξτε ότι το τελευταίο όριο που αναφέρεται σε αυτή την πρόταση είναι όριο πραγματικής ακολουθίας, άρα είναι ήδη ορισμένο το τι σημαίνει).

Δείξτε ότι:

(1) $z_n \to z$ αν και μόνο αν $\Re z_n \to \Re z$ και $\Im z_n \to \Im z$.
(2) $z_n \to z \iff \overline{z_n} \to \overline{z}$ (με $\overline{z} = \Re z - i\Im z$ συμβολίζουμε το *συζυγή* του z).
(3) $z_n \to z \implies |z_n| \to |z|$ (θυμηθείτε $|z|^2 = z\overline{z}$).
(4) Αν $z_n = \frac{n+i}{in+2}$ τότε $z_n \to -i$ (θυμίζουμε $|1/z| = 1/|z|$).
(5) Ο ορισμός της συνέχειας στο $z_0 \in \mathbb{C}$ μιας συνάρτησης $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ο ίδιος με αυτόν για πραγματικές συναρτήσεις:
$$z_n \to z_0 \implies f(z_n) \to f(z_0).$$
Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που δίνεται από τον τύπο $f(z) = z^2$ είναι συνεχής σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$.

Λύση:

(1) $|z_n - z|^2 = (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2$, όπου $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$, άρα $z_n \to z$ αν και μόνο αν $(x_n - x)^2 \to 0$ και $(y_n - y)^2 \to 0$, ή $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

(2) Αν $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$ τότε $\overline{z_n} = x_n - iy_n, \overline{z} = x - iy$. Αν $z_n \to z$ τότε, από το (1), έχουμε $x_n \to x$ και $y_n \to y$, άρα, και πάλι από το (1), $\overline{z_n} \to \overline{z}$. Η άλλη κατεύθυνση της ισοδυναμίας είναι ουσιαστικά η ίδια αφού $\overline{\overline{z}} = z$.

(3) $z_n \to z \implies x_n \to x, y_n \to y$ άρα $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to \sqrt{x^2 + y^2}$.

(4) Έχουμε
$$\frac{n+i}{2+in} = \frac{(n+i)(2-in)}{(2+in)(2-in)} = \frac{(n+i)(2-in)}{4+n^2} = \frac{3n + i(2-n^2)}{4+n^2} = \frac{3n}{4+n^2} + i\frac{2-n^2}{4+n^2}.$$
Αφού τα πραγματικά και φανταστικά μέρη τείνουν στο 0 και το -1 αντίστοιχα έπεται ότι το όριο είναι το $-i$.

(5) Υποθέτουμε $z_n \to z$. Πρέπει να δείξουμε $z_n^2 \to z^2$, δηλ. $\left|z_n^2 - z^2\right| \to 0$. Αλλά $\left|z_n^2 - z^2\right| = |z_n - z||z_n + z|$. Ο πρώτος παράγοντας του γινομένου τείνει στο 0 από την υπόθεσή μας ενώ για το δεύτερο έχουμε $|z_n + z| \le |z_n| + |z|$, άρα είναι φραγμένη ακολουθία αφού $|z_n| \to |z|$.

2 Αν $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ είναι μια συνάρτηση που είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο και κλειστό διάστημα $[a, b]$ γράφουμε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.

(1) Δείξτε ότι το άνω όριο υπάρχει πάντα (αλλά μπορεί να είναι $+\infty$).

(2) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ για $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}(x \ge 0)$ και το $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ για $g(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}(x \ge 1)$.

(3) Βρείτε παράδειγμα συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που να συγκλίνουν ομοιόμορφα (στο $\mathbb{R}$) στη μηδενική συνάρτηση και να ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = +\infty$. (Αυτό σημαίνει ότι για ομοιόμορφη σύγκλιση σε μη φραγμένα διαστήματα δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα (καταχρηστικά) ολοκληρώματα των συγκλινουσών συναρτήσεων συγκλίνουν στο ολοκλήρωμα της οριακής συνάρτησης.)

Λύση: (1) Η συνάρτηση $g(R) = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ είναι αύξουσα αφού $f(x) \ge 0$ (και άρα ολοκληρώνοντας σε μεγαλύτερο διάστημα δε μπορεί να μειώσει το ολοκλήρωμα). Άρα το όριο $\lim_{R\to+\infty} g(R)$ υπάρχει στο $[0, +\infty]$.

(2)

$$\int_{-R}^{R} e^{-x}\mathbf{1}\left(x \ge 0\right)\,dx = \int_{0}^{R} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-R},$$

άρα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_R 1 - e^{-R} = 1$. Και

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x}\mathbf{1}\left(x \ge 1\right) = \int_{1}^{R} \frac{dx}{x} = \log R,$$

οπότε $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_R \log R = +\infty$.

(3) Πάρτε $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}\left(n \le x \le n^2 + n\right)$. Αφού οι μόνες τιμές που παίρνει η f είναι 0 ή $1/n$ είναι φανερό ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε όλο το $\mathbb{R}$. Αλλά $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}(n^2 + n - n) = n$ το οποίο τείνει στο $+\infty$ για $n \to +\infty$.

3 Η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ για $x \in [a, b]$ και, επιπλέον, ικανοποιούν τη σχέση $p_n(a) = f(a)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση: Από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $q_n(x)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$. Ορίζουμε τα πολυώνυμα $p_n(x) = q_n(x) + f(a) - q_n(a)$ (είναι πολυώνυμα ώς άθροισμα πολυωνύμου και σταθεράς). Παρατηρούμε $p_n(a) = f(a)$. Επίσης

$$|f(x) - p_n(x)| = |f(x) - q_n(x) - f(a) + q_n(a)| \le |f(x) - q_n(x)| + |f(a) - q_n(a)|.$$

Παρατηρείστε ότι και οι δύο προσθετέτοι στο δεξί μέλος είναι $\le \rho(f, q_n)$ το οποίο τείνει στο 0 από την ομοιόμορφη σύγκλιση των q_n στην f. Δηλ. $\rho(f, p_n) \le 2\rho(f, q_n) \to 0$, άρα έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση των p_n στην f στο διάστημα $[a, b]$.

4 Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής παντού. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα $[a, b]$. (Δεν ισχυριζόμαστε ότι τα p_n συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f σε όλο το $\mathbb{R}$.)

Λύση: Χρησιμοποιούμε το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß για τη συνάρτηση f, στο διάστημα $[-n, n]$ και με ομοιόμορφη απόσταση $1/n$. Δηλ. βρίσκουμε πολυώνυμα $p_n(x)$ τέτοια ώστε

$$\sup_{-n \le x \le n} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{n}.$$

Ας είναι τώρα $[a, b]$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα. Μετά από κάποιο n_0 έχουμε (για $n \ge n_0$) $[a, b] \subseteq [-n, n]$, άρα για $n \ge n_0$ ισχύει

$$\sup_{a \le x \le b} |f(x) - p_n(x)| \le \sup_{-n \le x \le n} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0,$$

οπότε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

5 Αν $f, f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο (a,b), και οι f_n είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση: Έχουμε για κάθε n, x, y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε n τέτοιο ώστε οι όροι I και III να είναι το πολύ $\epsilon/3$. Αυτό είναι δυνατό λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης. Αφού έχουμε επιλέξει το n επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|x - y| \le \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le \epsilon/3.$$

Αυτό είναι δυνατό λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f_n. Αν λοιπόν $|x - y| \le \delta$ έχουμε $II \le \epsilon/3$, άρα $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$, άρα δείξαμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b).