

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 5 -  
Μ. Κολουντζάκης

Λύσεις των ασκήσεων

1 Η έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας σε ένα αριθμό επεκτείνεται και σε ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Ας είναι  $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$  μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Εδώ  $i = \sqrt{-1}$ , και  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα του  $z_n$  (και γράφουμε συνήθως  $x_n = \Re z_n, y_n = \Im z_n$ ). Επίσης γράφουμε  $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$  για το μέτρο του  $z_n$ . Το μέτρο  $|z| = \sqrt{|\Re z|^2 + |\Im z|^2}$  του μιγαδικού  $z$  έχει όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες που έχει η απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών, π.χ.  $|zw| = |z||w|$ . Ικανοποιεί επίσης και την τριγωνική ανισότητα  $|z + w| \leq |z| + |w|$  και άρα η ποσότητα  $d(z, w) = |z - w|$  αποτελεί μια μετρική στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών.

Λέμε ότι  $z_n \rightarrow z \in \mathbb{C}$  (ή  $\lim_n z_n = z$ ) αν  $|z_n - z| \rightarrow 0$  (προσέξτε ότι το τελευταίο όριο που αναφέρεται σε αυτή την πρόταση είναι όριο πραγματικής ακολουθίας, άρα είναι ήδη ορισμένο το τι σημαίνει).

Δείξτε ότι:

- (1)  $z_n \rightarrow z$  αν και μόνο αν  $\Re z_n \rightarrow \Re z$  και  $\Im z_n \rightarrow \Im z$ .
- (2)  $z_n \rightarrow z \iff \bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  (με  $\bar{z} = \Re z - i\Im z$  συμβολίζουμε το συζυγή του  $z$ ).
- (3)  $z_n \rightarrow z \implies |z_n| \rightarrow |z|$  (θυμηθείτε  $|z|^2 = z\bar{z}$ ).
- (4) Αν  $z_n = \frac{n+i}{in+2}$  τότε  $z_n \rightarrow -i$  (θυμίζουμε  $|1/z| = 1/|z|$ ).
- (5) Ο ορισμός της συνέχειας στο  $z_0 \in \mathbb{C}$  μιας συνάρτησης  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ο ίδιος με αυτόν για πραγματικές συναρτήσεις:

$$z_n \rightarrow z_0 \implies f(z_n) \rightarrow f(z_0).$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  που δίνεται από τον τύπο  $f(z) = z^2$  είναι συνεχής σε κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Λύση:

(1)  $|z_n - z|^2 = (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2$ , όπου  $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$ , άρα  $z_n \rightarrow z$  αν και μόνο αν  $(x_n - x)^2 \rightarrow 0$  και  $(y_n - y)^2 \rightarrow 0$ , ή  $x_n \rightarrow x$  και  $y_n \rightarrow y$ .

(2) Αν  $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$  τότε  $\bar{z}_n = x_n - iy_n, \bar{z} = x - iy$ . Αν  $z_n \rightarrow z$  τότε, από το (1), έχουμε  $x_n \rightarrow x$  και  $y_n \rightarrow y$ , άρα, και πάλι από το (1),  $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$ . Η άλλη κατεύθυνση της ισοδυναμίας είναι ουσιαστικά η ίδια αφού  $\bar{\bar{z}} = z$ .

(3)  $z_n \rightarrow z \implies x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  άρα  $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(4) Έχουμε

$$\frac{n+i}{2+in} = \frac{(n+i)(2-in)}{(2+in)(2-in)} = \frac{(n+i)(2-in)}{4+n^2} = \frac{3n+i(2-n^2)}{4+n^2} = \frac{3n}{4+n^2} + \frac{i(2-n^2)}{4+n^2}$$

Αφού τα πραγματικά και φανταστικά μέρη τείνουν στο 0 και το  $-1$  αντίστοιχα έπεται ότι το όριο είναι το  $-i$ .

(5) Υποθέτουμε  $z_n \rightarrow z$ . Πρέπει να δείξουμε  $z_n^2 \rightarrow z^2$ , δηλ.  $|z_n^2 - z^2| \rightarrow 0$ . Αλλά  $|z_n^2 - z^2| = |z_n - z||z_n + z|$ . Ο πρώτος παράγοντας του γινομένου τείνει στο 0 από την υπόθεσή μας ενώ για το δεύτερο έχουμε  $|z_n + z| \leq |z_n| + |z|$ , άρα είναι φραγμένη ακολουθία αφού  $|z_n| \rightarrow |z|$ .

**2** Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  είναι μια συνάρτηση που είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο και κλειστό διά-

στημα  $[a, b]$  γράφουμε  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ .

(1) Δείξτε ότι το άνω όριο υπάρχει πάντα (αλλά μπορεί να είναι  $+\infty$ ).

(2) Υπολογίστε το  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  για  $f(x) = e^{-x} \mathbf{1}(x \geq 0)$  και το  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$  για  $g(x) = \frac{1}{x} \mathbf{1}(x \geq 1)$ .

(3) Βρείτε παράδειγμα συναρτήσεων  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  που να συγκλίνουν ομοιόμορφα (στο  $\mathbb{R}$ ) στη μηδενική συνάρτηση και να ισχύει  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = +\infty$ . (Αυτό σημαίνει ότι για ομοιόμορφη σύγκλιση σε μη φραγμένα διαστήματα δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα (καταχρηστικά) ολοκληρώματα των συγκλινουσών συναρτήσεων συγκλίνουν στο ολοκλήρωμα της οριακής συνάρτησης.)

**Λύση:** (1) Η συνάρτηση  $g(R) = \int_{-R}^R f(x) dx$  είναι αύξουσα αφού  $f(x) \geq 0$  (και άρα ολοκληρώνοντας σε μεγαλύτερο διάστημα δε μπορεί να μειώσει το ολοκλήρωμα). Άρα το όριο  $\lim_{R \rightarrow +\infty} g(R)$  υπάρχει στο  $[0, +\infty]$ .

(2)

$$\int_{-R}^R e^{-x} \mathbf{1}(x \geq 0) dx = \int_0^R e^{-x} dx = 1 - e^{-R},$$

άρα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_R 1 - e^{-R} = 1$ . Και

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x} \mathbf{1}(x \geq 1) = \int_1^R \frac{dx}{x} = \log R,$$

οπότε  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lim_R \log R = +\infty$ .

(3) Πάρτε  $f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbf{1}(n \leq x \leq n^2 + n)$ . Αφού οι μόνες τιμές που παίρνει η  $f$  είναι 0 ή  $1/n$  είναι φανερό ότι  $f_n \rightarrow 0$  ομοιόμορφα σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Αλλά  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}(n^2 + n - n) = n$  το οποίο τείνει στο  $+\infty$  για  $n \rightarrow +\infty$ .

**3** Η  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων  $p_n(x)$  που συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f(x)$  για  $x \in [a, b]$  και, επιπλέον, ικανοποιούν τη σχέση  $p_n(a) = f(a)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Λύση:** Από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων  $q_n(x)$  που συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$  στο  $[a, b]$ . Ορίζουμε τα πολυώνυμα  $p_n(x) = q_n(x) + f(a) - q_n(a)$  (είναι πολυώνυμα ως άθροισμα πολυωνύμου και σταθεράς). Παρατηρούμε  $p_n(a) = f(a)$ . Επίσης

$$|f(x) - p_n(x)| = |f(x) - q_n(x) - f(a) + q_n(a)| \leq |f(x) - q_n(x)| + |f(a) - q_n(a)|$$

Παρατηρείστε ότι και οι δύο προσθετέοι στο δεξί μέλος είναι  $\leq \rho(f, q_n)$  το οποίο τείνει στο 0 από την ομοιόμορφη σύγκλιση των  $q_n$  στην  $f$ . Δηλ.  $\rho(f, p_n) \leq 2\rho(f, q_n) \rightarrow 0$ , άρα έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση των  $p_n$  στην  $f$  στο διάστημα  $[a, b]$ .

**4** Η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής παντού. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων  $p_n(x)$  τέτοια ώστε  $p_n(x) \rightarrow f(x)$  ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα  $[a, b]$ . (Δεν ισχυριζόμαστε ότι τα  $p_n$  συγκλίνουν ομοιόμορφα στην  $f$  σε όλο το  $\mathbb{R}$ .)

**Λύση:** Χρησιμοποιούμε το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß για τη συνάρτηση  $f$ , στο διάστημα  $[-n, n]$  και με ομοιόμορφη απόσταση  $1/n$ . Δηλ. βρίσκουμε πολυώνυμα  $p_n(x)$  τέτοια ώστε

$$\sup_{-n \leq x \leq n} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Ας είναι τώρα  $[a, b]$  ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα. Μετά από κάποιο  $n_0$  έχουμε (για  $n \geq n_0$ )  $[a, b] \subseteq [-n, n]$ , άρα για  $n \geq n_0$  ισχύει

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \leq \sup_{-n \leq x \leq n} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

οπότε  $p_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $[a, b]$ .

**5** Αν  $f, f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $(a, b)$ , και οι  $f_n$  είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**Λύση:** Έχουμε για κάθε  $n, x, y$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Έστω  $\epsilon > 0$ . Επιλέγουμε  $n$  τέτοιο ώστε οι όροι  $I$  και  $III$  να είναι το πολύ  $\epsilon/3$ . Αυτό είναι δυνατό λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης. Αφού έχουμε επιλέξει το  $n$  επιλέγουμε  $\delta > 0$  ώστε να ισχύει

$$|x - y| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon/3.$$

Αυτό είναι δυνατό λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της  $f_n$ . Αν λοιπόν  $|x - y| \leq \delta$  έχουμε  $II \leq \epsilon/3$ , άρα  $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ , άρα δείξαμε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $(a, b)$ .