Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 4 - Μ. Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 10 Μαρτίου 2026

1 Η έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας σε ένα αριθμό επεκτείνεται και σε ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Ας είναι $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Εδώ $i = \sqrt{-1}$, και $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα του z_n (και γράφουμε συνήθως $x_n = \Re z_n, y_n = \Im z_n$). Επίσης γράφουμε $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ για το μέτρο του z_n. Το μέτρο $|z| = \sqrt{|\Re z|^2 + |\Im z|^2}$ του μιγαδικού z έχει όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες που έχει η απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών, π.χ. $|zw| = |z||w|$. Ικανοποιεί επίσης και την τριγωνική ανισότητα $|z + w| \le |z| + |w|$ και άρα η ποσότητα $d(z, w) = |z - w|$ αποτελεί μια μετρική στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Λέμε ότι $z_n \to z \in \mathbb{C}$ (ή $\lim_n z_n = z$) αν $|z_n - z| \to 0$ (προσέξτε ότι το τελευταίο όριο που αναφέρεται σε αυτή την πρόταση είναι όριο πραγματικής ακολουθίας, άρα είναι ήδη ορισμένο το τι σημαίνει).

Δείξτε ότι:

(1) $z_n \to z$ αν και μόνο αν $\Re z_n \to \Re z$ και $\Im z_n \to \Im z$.

(2) $z_n \to z \iff \overline{z_n} \to \overline{z}$ (με $\overline{z} = \Re z - i\Im z$ συμβολίζουμε το *συζυγή* του z).

(3) $z_n \to z \Longrightarrow |z_n| \to |z|$ (θυμηθείτε $|z|^2 = z\overline{z}$).

(4) Αν $z_n = \frac{n+i}{in+2}$ τότε $z_n \to -i$ (θυμίζουμε $|1/z| = 1/|z|$).

(5) Ο ορισμός της συνέχειας στο $z_0 \in \mathbb{C}$ μιας συνάρτησης $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ο ίδιος με αυτόν για πραγματικές συναρτήσεις:

$$z_n \to z_0 \Longrightarrow f(z_n) \to f(z_0).$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που δίνεται από τον τύπο $f(z) = z^2$ είναι συνεχής σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$.

2 Αν $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ είναι μια συνάρτηση που είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο και κλειστό διάστημα $[a, b]$ γράφουμε $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.

(1) Δείξτε ότι το άνω όριο υπάρχει πάντα (αλλά μπορεί να είναι $+\infty$).

(2) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ για $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}\,(x \ge 0)$ και το $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ για $g(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}\,(x \ge 1)$.

(3) Βρείτε παράδειγμα συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που να συγκλίνουν ομοιόμορφα (στο $\mathbb{R}$) στη μηδενική συνάρτηση και να ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = +\infty$. (Αυτό σημαίνει ότι για ομοιόμορφη σύγκλιση σε μη φραγμένα διαστήματα δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα (καταχρηστικά) ολοκληρώματα των συγκλινουσών συναρτήσεων συγκλίνουν στο ολοκλήρωμα της οριακής συνάρτησης.)

3 Η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ για $x \in [a, b]$ και, επιπλέον, ικανοποιούν τη σχέση $p_n(a) = f(a)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4 Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής παντού. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)$ τέτοια ώστε $p_n(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα $[a, b]$. (Δεν ισχυριζόμαστε ότι τα p_n συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f σε όλο το $\mathbb{R}$.)

5 Αν $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο (a, b), και οι f_n είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.