Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

Συμβολισμός: Ο συμβολισμός $\mathbf{1}$(συνθήκη) σημαίνει 1 αν ισχύει η συνθήκη και 0 αλλιώς.

1 Βρείτε, αν υπάρχει, το κατά σημείο όριο των παρακάτω ακολουθιών συναρτήσεων:

$$\text{(a) } f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{nx^2}\mathbf{1}\left(\frac{1}{n} < x \le 1\right) + n^2 x \mathbf{1}\left(0 \le x \le \frac{1}{n}\right),$$

$$\text{(b) } g_n : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = \frac{x}{n}\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$$

Λύση: (a) Για κάθε σταθερό $x > 0$ η συνθήκη $0 \le x \le \frac{1}{n}$ παύει να ισχύει μετά από κάποιο n_0 άρα για αρκετά μεγάλο n έχουμε $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$ το οποίο τείνει στο 0 για σταθερό x και $n \to \infty$. Αν $x = 0$ τότε $f_n(x) = 0$ για κάθε n. Άρα η οριακή συνάρτηση υπάρχει και είναι η $f(x) = 0$.

(b) Ας ορίσουμε $t = \frac{n}{x}$ για σταθερό x (η ποσότητα t είναι συνάρτηση του n αλλά επιλέγουμε, για να μην επιβαρύνουμε το συμβολισμό, να μην το δείχνουμε αυτό γράφοντας, π.χ., t_n ή $t(n)$). Αν $x > 0$ τότε αν $n \to \infty$ έχουμε $t \to \infty$ (ενώ αν $x < 0$ έχουμε $t \to -\infty$). Οπότε

$$g_n(x) = \frac{\lfloor t \rfloor}{t},$$

και είναι φανερό ότι

$$\frac{t-1}{t} \le g_n(x) \le 1,$$

άρα $g_n(x) \to 1$ (το ίδιο ισχύει και για $x < 0$). Η οριακή συνάρτηση είναι η $g(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2 Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παντού συνεχής. Δείξτε ότι $\int_0^1 \left|f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right| dx \to 0$ για $n \to \infty$.

Λύση: Αν $x \in [0,1]$ τότε $x + \frac{1}{n} \in [0,2]$, άρα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος μπορούμε να θεωρήσουμε την f ως ορισμένη και συνεχή μόνο στο διάστημα $[0,2]$, οπότε αυτόματα η f είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\epsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon.$$

Αν $\frac{1}{n} < \delta$ (δηλ. για αρκετά μεγάλο n) θα έχουμε συνεπώς $\left|f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right| \le \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε και το άνω ολοκλήρωμα είναι $\le \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι πάει στο 0 για $n \to \infty$.

3 Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $C(A)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ που ειναι συνεχείς παντού στο A. Για $f, g \in C([0,1])$ ορίζουμε

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $d(f,g)$ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής στο χώρο $C([0,1])$.

Λύση: Το ότι $d(f,g) \ge 0$ είναι προφανές. Το ότι $d(f,g) = 0 \Longrightarrow \forall x \in A : f(x) = g(x)$ είναι συνέπεια της συνέχειας των f, g. Πράγματι αυτή συνεπάγεται ότι και η μη αρνητική συνάρτηση $|f(x) - g(x)|$ είναι συνεχής. Αν λοιπόν το ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής είναι 0 έπεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι παντού 0 (αυτό δε θα προέκυπτε αν δεν είχαμε τη συνέχεια), δηλ. $\forall x \in A : f(x) = g(x)$.

Η συμμετρική ιδιότητα $d(f,g) = d(g,f)$ είναι επίσης προφανής.

Για την τριγωνική ανισότητα $d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$ δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε στο A την ανισότητα (συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για αριθμούς)

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

4 Ένα σύνολο $X \subseteq C([0,1])$ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $g \in C([0,1])$ και $M > 0$ τέτοια ώστε
$$\forall f \in X: \quad \rho(f,g) \le M.$$
Αν $f, f_n \in C([0,1])$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ δείξτε ότι το σύνολο
$$\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$$
είναι φραγμένο.

Λύση: Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ υπάρχει κάποιο n_0 τέτοιο ώστε για $n > n_0$ να έχουμε $|f_n(x) - f(x)| \le 1$. Κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Μαζί με την προηγούμενη ανισότητα και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι για κάθε x έχουμε
$$|f_n(x)| \le M + 1, \quad (\text{για } n > n_0).$$
Αφού οι $f_1, f_2, \ldots, f_{n_0}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ έπεται ότι είναι φραγμένες εκεί και παίρνοντας M' να είναι μεγαλύτερο από όλες τις ποσότητες
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_j(x)|, \quad (\text{για } j = 1, 2, \ldots, n_0),$$
έχουμε
$$|f_n(x)| \le \max\left\{M+1, M'\right\}, \quad (\text{για } n \in \mathbb{N}).$$
Αυτό σημαίνει $\rho(f_n, 0) \le \max\{M+1, M'\}$, άρα το σύνολο $\{f_1, f_2, \ldots\}$ είναι φραγμένο.

5 (Δείτε Πρόβλημα 3 για ορολογία.) Στο χώρο $C([0,1])$ έχουμε δύο μετρικές την $d(f,g)$ που ορίσαμε στο Πρ. 3 και την $\rho(f,g) = \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|$. Αν $f, f_n \in C([0,1])$ αποδείξτε τη συνεπαγωγή
$$\rho(f_n, f) \to 0 \Longrightarrow d(f_n, f) \to 0.$$

Λύση: Έχουμε την ανισότητα
$$0 \le d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \le \int_0^1 \rho(f,g)\, dx = \rho(f,g),$$
οπότε το ζητούμενο είναι φανερό.

6 Δείξτε ότι η συνεπαγωγή του Προβλήματος 5 δεν αντιστρέφεται. Με άλλα λόγια βρείτε $f, f_n \in C([0,1])$ τέτοια ώστε $d(f_n, f) \to 0$ αλλά χωρίς να ισχύει $\rho(f_n, f) \to 0$.
Υπόδειξη: Πάρτε $g_n(x) = x^n$.

Λύση: Ακολουθούμε την υπόδειξη. Το κατά σημείο όριο της $g_n(x) = x^n$ στο $[0,1]$ είναι η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$
η οποία είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Επίσης
$$\int_0^1 |g_n(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$
Όμως $\rho(g_n, g) = 1$.

Μια άλλη λύση είναι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ που ορίζεται ως εξής: η f_n είναι 0 εκτός του διαστήματος $[1/(n+1), 1/n]$ και εντός του διαστήματος αυτού το γράφημα της f_n είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση το διάστημα αυτό και ύψος 1. Η οριακή συνάρτηση είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση και μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε τη ζητούμενη ιδιότητα.

7 Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ με ρητούς συντελεστές τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| \le \epsilon$ για $x \in [0, 1]$.

Λύση: Από το θεώρημα του Weierstraß υπάρχει πολυώνυμο $q(x)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - q(x)| \le \epsilon/2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ας είναι n ο βαθμός του $q(x)$ και q_j οι συντελεστές του, γράφουμε δηλ. το $q(x)$ ως
$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \cdots q_n x^n.$$
Επιλέγουμε τώρα ρητούς αριθμούς p_j, για $j = 0, 1, \ldots, n$, τέτοιους ώστε $|p_j - q_j| \le \frac{\epsilon}{2(n+1)}$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε τότε
$$|p(x) - q(x)| \le |p_0 - q_0| + |p_1 - q_1||x| + \cdots + |p_n - q_n||x|^n \le (n + 1) \max_j |p_j - q_j| \le \frac{\epsilon}{2},$$
και άρα $|f(x) - p(x)| \le \epsilon$ (και πάλι χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα).

8 Βρείτε μια συνεχή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ να ισχύει
$$\rho(f, p) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p(x)| = +\infty.$$

Λύση: Πάρτε $f(x) = e^x$. Αν $p(x)$ είναι πολυώνυμο τότε $e^x - p(x) \to +\infty$ για $x \to +\infty$, άρα το supremum στην εκφώνηση είναι $+\infty$.

9 (Μια πιο συγκεκριμένη μορφή του Προβλήματος 8.) Δείξτε ότι για κάθε $M > 0$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $\rho(|x|, p(x)) = \sup_{-M\le x\le M} ||x| - p(x)| \le \epsilon$. Δείξτε επίσης ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $q(x)$ τέτοιο ώστε
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} ||x| - q(x)| < \infty.$$

Λύση: Για το πρώτο απλά εφαρμόζουμε το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß στο διάστημα $[-M, M]$, όπου η συνάρτησή μας $|x|$ είναι συνεχής.

Αν $p(x)$ είναι πολυώνυμο με $\sup_{x\in\mathbb{R}} ||x| - q(x)| < \infty$ (είναι φραγμένη δηλ. η συνάρτηση $|x|-p(x)$) τότε το $p(x)$ δε μπορεί να έχει βαθμό > 1 γιατί τότε η διαφορά $p(x) - |x|$ θα έτεινε στο $+\infty$ για $x \to +\infty$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεσή μας για το $p(x)$. Άρα $p(x) = ax+b$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς a, b. Αν η διαφορά $ax + b - |x|$ είναι φραγμένη για $x > 0$ έπεται ότι $a = 1$. Τότε όμως η διαφορά $ax + b - |x|$ δεν είναι φραγμένη για $x < 0$, αφού είναι η συνάρτηση $2x + b$, άτοπο.

10 Αν η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια (δηλ. $f(-x) = f(x)$) και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $\rho(f, p) \le \epsilon$ και, επιπλέον, το $p(x)$ δεν έχει μονώνυμα περιττού βαθμού.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß για να προσεγγίσετε την $f(x)$ και χρησιμοποιείστε το πολυώνυμο $p(x)$ που βρήκατε όπως και το $p(-x)$.

Λύση: Από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| \le \epsilon$. Έπεται ότι το πολυώνυμο $p(-x)$ ικανοποιεί το ίδιο φράγμα $|f(x) - p(-x)| \le \epsilon$ αφού $f(-x) = f(x)$. Έστω το πολυώνυμο $q(x) = \frac{1}{2}(p(x) + p(-x))$ το οποίο δεν έχει μονώνυμα περιττού βαθμού (αφού αυτά του $p(x)$ «σκοτώνουν» αυτά του $p(-x)$). Έχουμε
$$|f(x) - q(x)| = \frac{1}{2}|(f(x) - p(x)) + (f(x) - p(-x))| \le \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) = \epsilon.$$