Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 4 - Μ. Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 6 Μαρτίου 2026

Συμβολισμός: Ο συμβολισμός $\mathbf{1}$(συνθήκη) σημαίνει 1 αν ισχύει η συνθήκη και 0 αλλιώς.

1 Βρείτε, αν υπάρχει, το κατά σημείο όριο των παρακάτω ακολουθιών συναρτήσεων:

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{nx^2}\mathbf{1}\left(\frac{1}{n} < x \le 1\right) + n^2 x \mathbf{1}\left(0 \le x \le \frac{1}{n}\right)$

(b) $g_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g_n(x) = \frac{x}{n}\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$

2 Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παντού συνεχής. Δείξτε ότι $\int_0^1 \left|f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right| dx \to 0$ για $n \to \infty$.

3 Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $C(A)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ που ειναι συνεχείς παντού στο A. Για $f, g \in C([0,1])$ ορίζουμε

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $d(f,g)$ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής στο χώρο $C([0,1])$.

4 Ένα σύνολο $X \subseteq C([0,1])$ λέγεται <u>φραγμένο</u> αν υπάρχει $g \in C([0,1])$ και $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\forall f \in X : \quad \rho(f,g) \le M.$$

Αν $f, f_n \in C([0,1])$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ δείξτε ότι το σύνολο

$$\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$$

είναι φραγμένο.

5 (Δείτε Πρόβλημα 3 για ορολογία.) Στο χώρο $C([0,1])$ έχουμε δύο μετρικές την $d(f,g)$ που ορίσαμε στο Πρ. 3 και την $\rho(f,g) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$. Αν $f, f_n \in C([0,1])$ αποδείξτε τη συνεπαγωγή

$$\rho(f_n, f) \to 0 \Longrightarrow d(f_n, f) \to 0.$$

6 Δείξτε ότι η συνεπαγωγή του Προβλήματος 5 δεν αντιστρέφεται. Με άλλα λόγια βρείτε $f, f_n \in C([0,1])$ τέτοια ώστε $d(f_n, f) \to 0$ αλλά χωρίς να ισχύει $\rho(f_n, f) \to 0$.

Υπόδειξη: Πάρτε $g_n(x) = x^n$.

7 Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ με ρητούς συντελεστές τέτοιο ώστε $|f(x) - p(x)| \le \epsilon$ για $x \in [0,1]$.

8 Βρείτε μια συνεχή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ να ισχύει

$$\rho(f, p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - p(x)| = +\infty.$$

9 (Μια πιο συγκεκριμένη μορφή του Προβλήματος 8.) Δείξτε ότι για κάθε $M > 0$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $\rho(|x|, p(x)) = \sup_{-M \le x \le M} ||x| - p(x)| \le \epsilon$. Δείξτε επίσης ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $q(x)$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} ||x| - q(x)| < \infty.$$

10 Αν η $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια (δηλ. $f(-x) = f(x)$) και $\epsilon > 0$ δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $\rho(f, p) \le \epsilon$ και, επιπλέον, το $p(x)$ δεν έχει μονώνυμα περιττού βαθμού.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα προσέγγισης του Weierstraß για να προσεγγίσετε την $f(x)$ και χρησιμοποιείστε το πολυώνυμο $p(x)$ που βρήκατε όπως και το $p(-x)$.