Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Λύσεις των ασκήσεων

1 Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß δείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$. Μην επικαλεστείτε κάποιο άλλο θεώρημα.

Λύση: Ας είναι $M \in [0,+\infty]$ το supremum της $|f(x)|$ για $x \in [0,1]$. Άρα υπάρχει ακολουθία σημείων $x_n \in [0,1]$ τέτοια ώστε $|f(x_n)| \to M$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstraß υπάρχει υπακολουθία της x_n η οποία συγκλίνει σε κάποιο $a \in [0,1]$. Από τη συνέχεια της f προκύπτει τότε το όριο της $|f|$ πάνω σε αυτή την υπακολουθία είναι $|f(a)|$. Άρα $M = |f(a)|$ και το M είναι αναγκαστικά πεπερασμένο, οπότε η f είναι φραγμένη.

Σχόλια: Η ίδια η παραπάνω απόδειξη δίνει και ότι το supremum της συνάρτησης «πιάνεται» κάπου στο $[0,1]$.

2 Η $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$. Δείξτε ότι είναι φραγμένη στο $(0,1)$.

Λύση: **Λύση Νο 1**: Στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας παίρνουμε $\epsilon = 1$ οπότε το $\delta > 0$ είναι τέτοιο ώστε

$$|x - y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le 1.$$

Αν $x \in (0,1)$ ας είναι $\Delta = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ η απόστασή του από το 1/2. Στο διάστημα ανάμεσα στα 1/2 και x τοποθετούμε σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_k$ τέτοια η απόσταση του x από το x_1 να είναι $\le \delta$, η απόσταση του x_1 από το x_2 να είναι $\le \delta$, κλπ, και τέλος η απόσταση του x_k από το 1/2 να είναι $\le \delta$. Εύκολα βλέπουμε ότι το πλήθος k των σημείων που θα χρειαστεί να βάλουμε ανάμεσα στα x και 1/2 είναι το πολύ $k \le \Delta/\delta$, και αφού $\Delta \le 1/2$ έπεται ότι $k \le \left\lceil \frac{1}{2\delta} \right\rceil$. Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\le |f(x) - f(1/2) + f(1/2)| \\
&\le |f(x) - f(1/2)| + |f(1/2)| \\
&= |f(x) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \cdots + f(x_k) - f(1/2)| + |f(1/2)| \\
&\le |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_k) - f(1/2)| + |f(1/2)| \\
&\le 1 + 1 + \cdots + 1 + |f(1/2)| \\
&= k + 1 + |f(1/2)| \\
&\le \left\lceil \frac{1}{2\delta} \right\rceil + 1 + |f(1/2)|.
\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι το $|f(x)|$ φράσσεται από μια ποσότητα που δεν εξαρτάται από το x, άρα η f είναι φραγμένη.

Λύση Νο 2: Στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας παίρνουμε $\epsilon = 1$ οπότε το $\delta > 0$ είναι τέτοιο ώστε

$$|x - y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le 1.$$

Έστω $a = \delta/2, b = 1 - \delta/2$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα και φραγμένη εκεί, οπότε ας είναι $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ας είναι τώρα $y \in (0,a)$ (και ομοίως αν $y \in (b,1)$). Τότε $|y - a| < \delta$ άρα $|f(y) - f(a)| \le 1$ οπότε $|f(y)| \le |f(a)| + 1 \le M + 1$. Άρα σε όλο το $(0,1)$ η $|f|$ φράσσεται από το $M + 1$.

3 Έχουμε $f(x) = e^x$, για $x \in [0,1]$, N ένας μεγάλος φυσικός αριθμός και η διαμέριση $\mathcal{P}_N$ του $[0,1]$ σε N διαστήματα μήκους $1/N$ το καθένα. Υπολογίστε το κάτω Riemann άθροισμα της f στο $[0,1]$ για τη διαμέριση $\mathcal{P}_N$. Ο τύπος που θα βρείτε θα πρέπει να είναι όσο γίνεται πιο απλός και να είναι φυσικά συνάρτηση μόνο του N. Βρείτε έπειτα το όριο αυτής της ποσότητας για $N \to \infty$.

Λύση: Τα σημεία της διαμέρισης είναι τα

$$t_0 = 0, t_1 = 1/N, t_2 = 2/N, \ldots, t_k = k/N, \ldots, t_{N-1} = (N-1)/N, t_N = 1.$$

Επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα το infimum της σε ένα διάστημα είναι η τιμή της στο αριστερό σημείο του διαστήματος. Άρα

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}_N) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{k/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{1/N})^k \\ &= \frac{1}{N} \frac{1-e^{N/N}}{1-e^{1/N}} \quad (*) \\ &= \frac{1-e}{N(1-e^{1/N})}. \end{aligned}$$

(Η ισότητα (*) είναι από το άθροισμα πεπερασμένης γεωμετρικής προόδου $1+a+a^2+\cdots+a^{N-1} = \frac{1-a^N}{1-a}$, για $a \neq 1$.) Ο παρανομαστής της τελευταίας ποσότητας είναι ο $\frac{1-e^{1/N}}{1/N}$ του οποίου το όριο για $N \to \infty$ ισούται με το $\lim_{x\to 0+} \frac{1-e^x}{x}$ που εύκολα υπολογίζεται ότι ισούται με -1. Άρα

$$\lim_{N\to\infty} L(f, \mathcal{P}_N) = e - 1,$$

το οποίο εύκολα αναγνωρίζουμε ως το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x\,dx$.

4 Αν $f(x) = ax$ (όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά), δείξτε ότι αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[1, 2]$ και L, U τα κάτω και άνω Riemann αθροίσματα για την f που αντιστοιχούν στη διαμέριση $\mathcal{P}$ δείξτε ότι η ποσότητα $(L + U)/2$ δεν εξαρτάται από τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Λύση: Σε κάθε διάστημα $[t_i.t_{i+1}]$ της διαμέρισης το γράφημα της συνάρτησης είναι μια ευθεία με θετική κλίση, άρα το infimum πιάνεται στο αριστερό άκρο του διαστήματος και το supremum στο δεξί. Η συνεισφορά του διαστήματος $[t_i.t_{i+1}]$ στο $L(f, \mathcal{P})$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το διάστημα αυτό και ύψος $f(t_i)$, ενώ η συνεισφορά του διαστήματος αυτού στο $U(f, \mathcal{P})$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το διάστημα και ύψος $f(t_{i+1})$. Άρα η συνεισφορά του $[t_i.t_{i+1}]$ στο μέσο όρο $(L + U)/2$ είναι

$$(t_{i+1} - t_i) \frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2},$$

ή, με άλλα λόγια, το εμβαδό του τραπεζίου που είναι το χωρίο κάτω από το γράφημα και πάνω από τον άξονα των x. Άρα η ποσότητα $(L + U)/2$ ισούται ακριβώς με το εμβαδό κάτω από το γράφημα της συνάρτησης και πάνω από το διάστημα $[1, 2]$ στον άξονα των x, και συνεπώς δεν εξαρτάται από τη διαμέριση.

5 Η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ (πλευρικές παράγωγοι στα άκρα). Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[0, 1]$, με όλα τα διαστήματά της μήκους $\le \epsilon$, και L, U τα κάτω και άνω Riemann αθροίσματα της f για αυτή τη διαμέριση τότε $U - L \le M\epsilon$.

Λύση: Αφού η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ είναι και φραγμένη, π.χ. με $|f'(x)| \le M$, άρα (από το Θεώρημα Μέσης Τιμής) η f είναι Lipschitz με σταθερά M, δηλ.

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|,$$

για $x, y \in [0, 1]$. Αν λοιπόν το supremum και το infimum της f στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ της διαμέρισης πιάνονται στα σημεία y και z του διαστήματος αντίστοιχα τότε ισχύει από την ιδιότητα Lipschitz παραπάνω ότι $0 \le f(z) - f(y) \le M|z - y| \le M|t_{i+1} - t_i|$, οπότε αν όλα τα διαστήματα της διαμέρισης έχουνε μήκος $\le \epsilon$ τότε ισχύει $0 \le f(z) - f(y) \le M\epsilon$ και η συνεισφορά του διαστήματος $[t_i, t_{i+1}]$ στην (μη αρνητική) ποσότητα $U - L$ είναι το πολύ $M\epsilon|t_{i+1} - t_i|$. Αθροίζοντας για όλα τα i παίρνουμε $U - L \le M\epsilon$ μια και το συνολικό μήκος είναι 1.

6 Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$. Εκφράστε την ποσότητα S_n ως κάτω Riemann άθροισμα της $\sqrt{1-x^2}$ στο διάστημα $[0,1]$. Αφού το κάνετε αυτό, σε ποια τιμή αναμένετε να συγκλίνει το S_n;

Λύση: Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n^2-k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1-(k/n)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i+1}{n}\right)^2},$$

όπου στο τέλος κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $i = k-1$. Ορίζουμε την φθίνουσα συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, για $x \in [0,1]$, και παρατηρούμε ότι η άνω ποσότητα γράφεται ως

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Ορίζουμε τη διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0,1]$ χωρίζοντας το διάστημα σε n ίσα διαστήματα και βλέπουμε ότι στο διάστημα $[i/n, (i+1)/n]$ το infimum πιάνεται στο δεξί άκρο (αφού η συνάρτηση είναι φθίνουσα). Άρα το άνω άθροισμα είναι το κάτω Riemann άθροισμα της f γι' αυτή τη διαμέριση. Αναμένουμε λοιπόν την ποσότητα αυτή να συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ή, πιο γεωμετρικά, στο εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y = \sqrt{1-x^2}$ και πάνω από το διάστημα $[0,1]$ στον άξονα των x. Αυτό όμως είναι το κομμάτι του μοναδιαίου δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο, άρα είναι εμβαδού $\pi/4$.

7 Βρείτε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αλλά η f δεν είναι.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ έχει infimum ίσο με -1 και supremum ίσο με 1 σε κάθε διάστημα, άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη. Όμως η $|f|$ είναι σταθερή συνάρτηση άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

8 Αποδείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = \frac{1}{n} \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υπόδειξη: Πρέπει, αν $\epsilon > 0$, να βρείτε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0,1]$ τ.ώ. $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \le \epsilon$. Δοκιμάστε μια διαμέριση που το πρώτο της διάστημα από αριστερά να είναι το $[0,\epsilon/2]$ και από κει και πέρα να έχει όλα τα άλλα της διαστήματα ισομήκη με το πλήθος τους να είναι ένας μεγάλος φυσικός αριθμός N. Επιλέξτε το N ώστε να ισχύει η επιθυμητή ανισότητα.

Λύση: Ακολουθώντας την υπόδειξη παίρνουμε μια διαμέριση $\mathcal{P}$ της οποίας το πρώτο διάστημα είναι το $[0,\epsilon/2]$. Στο διάστημα $[\epsilon/2, 1]$ η διαμέριση αποτελείται από N ίσα διαστήματα μήκους $(1-\epsilon/2)/N$ το καθένα. (Ο αριθμός N απομένει να επιλεγεί. Αργότερα θα τον επιλέξουμε τόσο μεγάλο ώστε να ισχύει η επιθυμητή ανισότητα.)

Παρατηρούμε μετά ότι η συνάρτηση f έχει σε κάθε διάστημα infimum ίσο με το 0 αφού σε κάθε διάστημα είναι ≥ 0 και παίρνει κάπου την τιμή 0. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα κάτω Riemann αθροίσματα είναι, άρα αυτό που απομένει να δειχτεί είναι ότι μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\mathcal{P}$ ώστε $U(f,\mathcal{P}) \le \epsilon$.

Σε κάθε διάστημα η συνάρτησή μας παίρνει τιμές από 0 ή 1 άρα το supremum της σε κάθε διάστημα είναι 0 ή 1. Είναι ίσο με 1 αν και μόνο αν το διάστημα περιέχει σημείο της μορφής $1/n$ (αφού μόνο σε αυτά τα σημεία η f παίρνει την τιμή 1. Στο άνω άθροισμα $U(f,\mathcal{P})$ υπάρχει μια συνεισφορά από κάθε διάστημα της $\mathcal{P}$. Η συνεισφορά από το πρώτο διάστημα της $\mathcal{P}$ είναι

$\epsilon/2$ αφού το supremum εκεί είναι 1 και το μήκος του διαστήματος είναι $\epsilon/2$. Από τα υπόλοιπα N διαστήματα (στο διάστημα $[\epsilon/2, 1]$) συνεισφέρουν κάτι μη μηδενικό μόνο τα διαστήματα που περιέχουν κάποιον αριθμό της μορφής $1/n$, για κάποιο φυσικό αριθμό n. Το πλήθος αυτών των διαστημάτων της διαμέρισης είναι το πολύ

$$2\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil.$$

Για να το δούμε αυτό μετράμε πρώτα τους φυσικούς αριθμούς n τέτοιους ώστε $\epsilon/2 \le 1/n$, και βρίσκουμε ότι είναι το πολύ $\lceil 2/\epsilon \rceil$. Αφού ο καθένας τους μπορεί να συμμετέχει (ως άκρο) σε δύο το πολύ διαστήματα της διαμέρισης διπλασιάζουμε αυτή την ποσότητα. Καθένα από αυτά τα διαστήματα (που περιέχουν κάποιον όρο της μορφής $1/n$) συνεισφέρει στο $U(f, \mathcal{P})$ ακριβώς $(1 - \epsilon/2)/N$. Συλλέγοντας όλες τις συνεισφορές στο $U(f, \mathcal{P})$ έχουμε

$$U(f, \mathcal{P}) \le \frac{\epsilon}{2} + 2\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil \cdot \frac{1 - \epsilon/2}{N}.$$

Επιλέγουμε τώρα το N ώστε ο δεύτερος προσθετέος να είναι $\le \epsilon/2$ και παίρνουμε συνολικά $U(f, \mathcal{P}) \le \epsilon$. Αφού το ϵ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

9 Βρείτε ένα παράδειγμα ακολουθίας a_n που να ικανοποιεί την ανισότητα $|a_n - a_{n+1}| \le \dfrac{1}{n}$ αλλά να μη συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Επίσης βρείτε παράδειγμα ακολουθίας b_n που να ικανοποιεί την ισότητα $|b_n - b_{n+1}| = \dfrac{1}{n}$ και η b_n να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Λύση: Ξέρουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει στο $+\infty$. Με άλλα λόγια, αν $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς αυτής τότε $a_n \to +\infty$. Αλλά $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$, οπότε η a_n έχει τις ιδιότητες που θέλουμε.

Ξέρουμε επίσης ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ τείνει σε αυτόν τον πραγματικό αριθμό. Ισχύει και πάλι $|b_n - b_{n-1}| = \frac{1}{n}$.

10 Βρείτε μια ακολουθία a_n που να έχει κάθε πραγματικό αριθμό ως σημείο συσσώρευσης.

Λύση: **Λύση Νο 1**: Ξέρουμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε τους ρητούς αριθμούς ως τους όρους μιας ακολουθίας:

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Αφού σε κάθε διάστημα υπάρχουν ρητοί αριθμοί, κάθε πραγματικός αριθμός είναι σημείο συσσώρευσης των ρητών, δηλ. της ακολουθίας a_n.

Λύση Νο 2: Θα ορίσουμε την ακολουθία μας κατασκευάζοντας πεπερασμένα κομμάτια της σε ολοένα και μεγαλύτερα μπλοκ. Αρχίζουμε παίρνοντας το διάστημα $[-1, 1]$ και ορίζοντας τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας μας να είναι στο διάστημα αυτό, ισαπέχοντας (άρα με μεταξύ τους κενό το 2/10). Στο δεύτερο βήμα παίρνουμε το διάστημα $[-2, 2]$ και ορίζουμε τους 100 επόμενους όρους της ακολουθίας μας να είναι στο διάστημα αυτό και ισαπέχοντες, άρα με κενό ανάμεσά τους το $4/10^2$. Στο τρίτο βήμα παίρνουμε 10^3 ισαπέχοντες όρους στο διάστημα $[-3, 3]$, και γενικά στο βήμα n παίρνουμε 10^n ισαπέχοντες όρους στο διάστημα $[-n, n]$, και άρα με κενό ανάμεσά τους το $2n/10^n$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει όρος της ακολουθίας στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Έστω $N = \lceil 10|x| \rceil$ και $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\epsilon > 2M/10^M$ (αυτό είναι εφικτό γιατί η ακολουθία $2M/10^M$ τείνει στο 0 με το M. Αν πάρουμε $k = \max\{N, M\}$ τότε σίγουρα κάποιος όρος της ακολουθίας μας από το k βήμα της κατασκευής της θα ανήκει στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

11 Έστω $I_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$, $J_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Υπολογίστε τα παρακάτω σύνολα:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \setminus I_n.$$

Λύση:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 1).$$

Απόδειξη αυτού: αν $x \le 0$ ή $x \ge 1$ τότε το x δεν ανήκει σε κανένα I_n άρα ούτε και στην ένωσή τους. Αν $x \in (0, 1)$ έστω

$$\delta = \min\{x, 1 - x\}$$

η απόσταση του x από τα άκρα του διαστήματος $(0, 1)$. Αν $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ τότε $x \in I_n$, άρα κάθε $x \in (0, 1)$ ανήκει στην παραπάνω ένωση.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = [0, 1].$$

Απόδειξη αυτού: αν $x < 0$ ή $x > 1$ τότε ας είναι

$$\delta = \min\{|x|, |x - 1|\}$$

η απόσταση του x από τα άκρα του διαστήματος $[0, 1]$. Αν $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ τότε $x \notin J_n$ οπότε δεν ανήκει ούτε στην άνω τομή. Αν $x \in [0, 1]$ τότε ανήκει σε όλα τα J_n οπότε ανήκει και στην άνω τομή.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \setminus I_n = \{0, 1\}.$$

Απόδειξη αυτού: έχουμε $J_n \setminus I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$. Είναι φανερό ότι τα 0 και 1 ανήκουν σε όλα τα $J_n \setminus I_n$ οπότε ανήκουν και στην τομή. Αν $x \ne 0, 1$ και

$$\delta = \min\{|x|, |x - 1|\}$$

η απόσταση αυτού από τα 0 και 1 τότε αν $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ τότε $x \notin J_n \setminus I_n$, οπότε το x δεν ανήκει στην άνω τομή.