Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 2 - Μ. Κολουντζάκης

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Τελευταία ενημέρωση: 18 Φεβρουαρίου 2026

1 Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß δείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$. Μην επικαλεστείτε κάποιο άλλο θεώρημα.

2 Η $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$. Δείξτε ότι είναι φραγμένη στο $(0,1)$.

3 Έχουμε $f(x) = e^x$, για $x \in [0,1]$, N ένας μεγάλος φυσικός αριθμός και η διαμέριση $\mathcal{P}_N$ του $[0,1]$ σε N διαστήματα μήκους $1/N$ το καθένα. Υπολογίστε το κάτω Riemann άθροισμα της f στο $[0,1]$ για τη διαμέριση $\mathcal{P}_N$. Ο τύπος που θα βρείτε θα πρέπει να είναι όσο γίνεται πιο απλός και να είναι φυσικά συνάρτηση μόνο του N. Βρείτε έπειτα το όριο αυτής της ποσότητας για $N \to \infty$.

4 Αν $f(x) = ax$ (όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά), δείξτε ότι αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[1,2]$ και L, U τα κάτω και άνω Riemann αθροίσματα για την f που αντιστοιχούν στη διαμέριση $\mathcal{P}$ δείξτε ότι η ποσότητα $(L+U)/2$ δεν εξαρτάται από τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

5 Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ (πλευρικές παράγωγοι στα άκρα). Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[0,1]$, με όλα τα διαστήματά της μήκους $\le \epsilon$, και L, U τα κάτω και άνω Riemann αθροίσματα της f για αυτή τη διαμέριση τότε $U - L \le M\epsilon$.

6 Έστω $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$. Εκφράστε την ποσότητα S_n ως κάτω Riemann άθροισμα της $\sqrt{1-x^2}$ στο διάστημα $[0,1]$. Αφού το κάνετε αυτό, σε ποια τιμή αναμένετε να συγκλίνει το S_n;

7 Βρείτε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αλλά η f δεν είναι.

8 Αποδείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = \frac{1}{n} \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υπόδειξη: Πρέπει, αν $\epsilon > 0$, να βρείτε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0,1]$ τ.ώ. $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \leq \epsilon$. Δοκιμάστε μια διαμέριση που το πρώτο της διάστημα από αριστερά να είναι το $[0,\epsilon/2]$ και από κει και πέρα να έχει όλα τα άλλα της διαστήματα ισομήκη με το πλήθος τους να είναι ένας μεγάλος φυσικός αριθμός N. Επιλέξτε το N ώστε να ισχύει η επιθυμητή ανισότητα.

9 Βρείτε ένα παράδειγμα ακολουθίας a_n που να ικανοποιεί την ανισότητα $|a_n - a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{n}$ αλλά να μη συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Επίσης βρείτε παράδειγμα ακολουθίας b_n που να ικανοποιεί την ισότητα $|b_n - b_{n+1}| = \dfrac{1}{n}$ και η b_n να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

10 Βρείτε μια ακολουθία a_n που να έχει κάθε πραγματικό αριθμό ως σημείο συσσώρευσης.

11 Έστω $I_n = \left(\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right)$, $J_n = \left(-\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Υπολογίστε τα παρακάτω σύνολα:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \setminus I_n.$$