Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 - Μ. Κολουντζάκης

Λύσεις των ασκήσεων

1 Με χρήση του $\epsilon - \delta$ ορισμού της συνέχειας δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής για $x = 1$.

Λύση: Ας είναι $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x-1| \le \delta \Longrightarrow \left|x^2 - 1\right| \le \epsilon. \tag{1}$$

Εξ αρχής αποφασίζουμε ότι το δ θα είναι ≤ 1, οπότε αν ισχύει η υπόθεση της άνω συνεπαγωγής θα έχουμε αναγκαστικα $0 \le x \le 2$. Η επιθυμητή ανισότητα $\left|x^2 - 1\right| \le \epsilon$ γράφεται ισοδύναμα $|x-1| \le \frac{\epsilon}{x+1}$ (παρατηρείστε ότι λόγω της ανισότητας $0 \le x \le 2$ δε χρειάζεται να ανησυχήσουμε για μηδενισμό του παρανομαστή). Αν λοιπόν επιλέξουμε το δ ώστε να ισχύει (πάντα υπό την υπόθεση $0 \le x \le 2$) $\delta \le \frac{\epsilon}{x+1}$ τότε η επιθυμητή συνεπαγωγή (1) ισχύει. Όμως, αφού $0 \le x \le 2$ έχουμε $x + 1 \le 3$ άρα $\frac{\epsilon}{3} \le \frac{\epsilon}{x+1}$, άρα αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \min\{1, \epsilon/3\}$.

Σχόλια: Το min μπήκε γιατί θυμόμαστε την αρχική μας απόφαση ότι θέλουμε το δ να είναι ≤ 1. Εξ άλλου δε μας εμποδίζει κανείς να επιλέξουμε το δ οσοδήποτε μικρό θέλουμε. Πρέπει όμως να είναι θετικό και να μην εξαρτάται από τίποτε πέρα από το ϵ και το σημείο στο οποίο υπολογίζουμε τη συνέχεια. Αυτό το τελευταίο όμως δεν είναι μεταβλητό στη συγκεκριμένη άσκηση, αφού ελέγχουμε μόνο τη συνέχεια στο 1. Θα ήταν λοιπόν σφάλμα αν επιλέγαμε παραπάνω το δ να είναι η ποσότητα $\epsilon/(x+1)$ αφού το δ αυτό εξαρτάται από την ποσότητα x.

2 Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ που να είναι παντού συνεχής στο $(1, 2)$ αλλά όχι φραγμένη στο $(1, 2)$.

Λύση: $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (τέτοιες ώστε ο παρανομαστής δε μηδενίζεται στο πεδίο ορισμού) και δεν είναι φραγμένη αφού $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$.

3 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής παντού. Είναι η $f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$; Ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Λύση: Η f είναι συνεχής σε σημεία εκτός του μηδενός ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για τη συνέχεια στο 0 παρατηρούμε ότι $|f(x)| \le |x|$ για κάθε x, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Επειδή είναι συνεχής στο φραγμένο κλειστό διάστημα $[-1,1]$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής εκεί.

Η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο $\mathbb{R}$. Για να το αποδείξουμε αυτό δείχνουμε πρώτα ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο $A = [\frac{1}{2}, +\infty)$. Αυτό ισχύει γιατί $f'(x) = (x\cos\frac{1}{x})' = \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ και έχουμε $|f'(x)| \le 3$ στο σύνολο A, οπότε η συνάρτηση είναι Lipschitz στο A και συνεπώς ομοιόμορφα συνεχής εκεί. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $B = (-\infty, -\frac{1}{2}]$.

Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f σε κάθε ένα από τα τρία σύνολα $A, B, [-1,1]$ προκύπτει η ομοιόμορφη συνέχεια της στην ένωση αυτών, δηλ. στο $\mathbb{R}$. Ας δούμε πώς.

Ας δείξουμε κατ' αρχήν ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-1,+\infty) = [-1,1] \cup A$. Ας είναι $\epsilon > 0$ και $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x, y \in [-1,1] : |x-y| \le \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon. \tag{2}$$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου δ_1 προκύπτει από την ομοιόμορφη συνέχεια στο $[-1,1]$. Ομοίως υπάρχει ένα $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x, y \in A : |x-y| \le \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon. \tag{3}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $[-1,1] \cap A = [\frac{1}{2}, 1]$ και διαλέγουμε

$$\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{4}\right\}.$$

Αν τώρα $x, y \in [-1,+\infty)$ και $|x-y| \le \delta$ έπεται κατ' αρχήν ότι τα x, y ανήκουν και τα δύο στο $[-1,1]$ ή και τα δύο στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$ (ακριβώς επειδή τα δύο αυτά σύνολα τέμνονται σε ένα διάστημα μήκους $\frac{1}{2}$). Άρα καλυπτόμαστε από μια από τις δύο σχέσεις (2) και (3) και συμπεραίνουμε ότι $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$.

Με αυτό τον τρόπο περνάμε από την ομοιόμορφη συνέχεια σε κάθε ένα από τα δύο μικρότερα (και τεμνόμενα σύνολα) στην ομοιόμορφη συνέχεια στην ένωσή τους. Κάνοντας αυτό τον συλλογισμό ακόμη μια φορά (με τα σύνολα B και $[-1,+\infty)$) συμπεραίνουμε την ομοιόμορφη συνέχεια σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Σχόλια: Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι αν μια συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε ένα από δύο τεμνόμενα *διαστήματα* τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής στην ένωσή τους. Κάντε το. Προσοχή όμως. Δεν είναι σωστό ότι αν K, L είναι δύο τυχαία **τεμνόμενα** υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (όχι κατ' ανάγκη διαστήματα) και η συνάρτηση $f : K \cup L \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο K και στο L τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο $K \cup L$. Μπορεί να μην είναι καν συνεχής στο $K \cup L$. Βρείτε ένα τέτοιο παράδειγμα.

4 Έστω A ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ *δεν είναι φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τ.ώ. $|f(x_n)| \to +\infty$.

Λύση: Αν υπάρχει τέτοια ακολουθία τότε είναι προφανές ότι δε μπορεί να υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $\forall x \in A : |f(x)| \le C$, άρα η f δεν είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι η f δεν είναι φραγμένη έχουμε υποθέσει ότι

$$\forall M > 0 : \quad \exists x \in A : \quad |f(x)| > M.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα αυτή την πρόταση διαδοχικά για $M = 1, 2, 3, \ldots$, και όταν τη χρησιμοποιούμε για $M = n$ ονομάζουμε x_n το σημείο του A που προκύπτει και που έχει την ιδιότητα $|f(x_n)| > n$. Είναι φανερό τώρα ότι $|f(x_n)| \to +\infty$.

Σχόλια: Αν θέλει κανείς να ξεφορτωθεί τις απόλυτες τιμές στο συμπέρασμα της άσκησης τότε η σωστή πρόταση είναι ότι η f δεν είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ με $f(x_n) \to +\infty$ ή υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ με $f(x_n) \to -\infty$. Πώς προκύπτει αυτό από την άσκηση που λύσαμε; Έχουμε βρει ακολουθία $x_n \in A$ με $|f(x_n)| \to +\infty$. Στην ακολουθία $f(x_n)$ υπάρχουν άπειροι θετικοί όροι ή υπάρχουν άπειροι αρνητικοί όροι (ή και τα δύο). Αν υποθέσουμε το πρώτο τότε σε αυτή την υπακολουθία το όριο της $f(x_n)$ είναι $+\infty$ ενώ αν υποθέσουμε το δεύτερο τότε σε αυτή την υπακολουθία το όριο είναι $-\infty$.

5 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Λύση: Αν ήταν τότε για $\epsilon = 1$, για παράδειγμα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - y| \le \delta \Longrightarrow |e^x - e^y| \le 1$. Παίρνουμε $y = x + \delta$ οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ικανοποιείται η υπόθεση της άνω συνεπαγωγής και άρα πρέπει να ισχύει το συμπέρασμα. Όμως

$$\left| e^x - e^{x+\delta} \right| = e^x(e^\delta - 1) \to \infty, \quad \text{για } x \to +\infty,$$

πράγμα αδύνατο αν $\left| e^x - e^{x+\delta} \right| \le 1$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

6 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1, 2)$.

Λύση: Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$

$$\lim_{x \to 1+} |f(x) - f(x+\delta)| = \lim_{x \to 1+} \frac{\delta}{(x-1)(x+\delta-1)} = +\infty,$$

άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1,2)$.

7 Δώστε παράδειγμα μια συνάρτησης $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής και φραγμένη αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

Λύση: Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = \cos\frac{1}{x}$. Είναι προφανώς $|f(x)| \le 1$ και είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Αρκεί να βρούμε σημεία που να είναι οσοδήποτε κοντά μεταξύ τους και που οι εικόνες τους δεν είναι κοντά μεταξύ τους. Αν, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ πάρουμε $x = \frac{1}{2n\pi}$ και $y = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ τότε $f(x) = 1$ και $f(y) = -1$ και άρα $|f(x) - f(y)| = 2$. Όμως η διαφορά $|x - y| = \dfrac{1}{2n(2n+1)\pi}$ μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε αν απλά επιλέξουμε το n να είναι μεγάλο.

8 Αν μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα (φραγμένο ή όχι) έχει παντού παράγωγο και $|f'(x)| \le 10$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.)

Λύση: Αn x, y σημεία στο πεδίο ορισμού της f, τότε $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$ για κάποιο ξ ανάμεσα στα x και y από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (εδώ είναι που χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της f είναι διάστημα, και άρα η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη ανάμεσα στα x, y). Άρα $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le 10|x - y|$ (δηλ. η συνάρτηση f είναι Lipschitz με σταθερά 10). Αν τώρα $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \epsilon/10$ και άρα ισχύει η συνεπαγωγή $|x - y| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon$.

9 Αν $\alpha > 0$ η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται τύπου Lipschitz-α αν υπάρχει μια θετική σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$.

(α) Δείξτε ότι τέτοιες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο A.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα ενός διαστήματος A και μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ που να είναι Lipschitz-$\frac{1}{2}$ αλλά όχι Lipschitz-1.

(γ) Δείξτε ότι αν $\alpha > 1$ τότε οι μόνες συναρτήσεις σε ένα διάστημα A που είναι Lipschitz-α είναι οι σταθερές.

Λύση: (α) Στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας πάρτε $\delta = (\epsilon/C)^{1/\alpha}$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = x^{1/2}$ στο $[0,1]$ δεν είναι Lipschitz-1: αν $x = 0, y > 0$ τότε $|f(x) - f(y)| = y^{1/2}$. Αν έχουμε $y^{1/2} \leq Cy$ τότε έπεται $y \geq 1/C^2$ οπότε η ανισότητα αυτή δε μπορεί να ισχύει για όλα τα $y > 0$. Για να δείξουμε ότι είναι Lipschitz-$\frac{1}{2}$ παίρνουμε $0 \leq x \leq y$ και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq C(y-x)^{1/2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ παίρνουμε ισοδύναμα

$$y - x \leq C(y-x)^{1/2}(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με $(y-x)^{1/2} \leq C(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ το οποίο έπεται από την $(y-x)^{1/2} \leq \sqrt{y}$ για $C = 1$ αφού $y - x \leq y$.

(γ) Αν $\alpha > 1$ και η f είναι Lipschitz-α τότε για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq \frac{|h|^\alpha}{|h|} = |h|^{\alpha-1} \to 0 \text{ για } h \to 0,$$

άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ οπότε η f είναι σταθερή.

10 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση: $|f'(x)| = |-\sin x| \leq 1$ άρα η συνάρτηση είναι Lipschitz στο $\mathbb{R}$ με σταθερά 1 και άρα ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

11 Για την ακολουθία a_n ισχύει $|a_n - a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η a_n είναι Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε να ισχύει $|a_n - a_m| \leq \epsilon$. Έχουμε, υποθέτοντας $m \geq n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - \cdots + a_{m-1} - a_m| \\
&\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\
&\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \quad \text{(εδώ χρησιμοποιήσαμε την} \\
&\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Όμως η σειρά $\sum \frac{1}{k^2}$ είναι συγκλίνουσα άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \epsilon$ ("η ουρά της σειράς τείνει στο 0"), και αυτή ακριβώς είναι η επιλογή του n_0 που κάνουμε. Έχουμε έτσι αποδείξει ότι η a_n είναι Cauchy, άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

12 Έστω $a_n \in \mathbb{R}$ και
$$\mu_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
η ακολουθία των *μέσων όρων* της a_n.

Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ τότε και $\mu_n \to a$. Δείξτε επίσης, βρίσκοντας κατάλληλο παράδειγμα ακολουθίας a_n, ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, ότι μπορεί δηλ. να συγκλίνει η μ_n χωρίς να συγκλίνει η a_n.

Λύση: Ας είναι $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n \ge n_0$ να ισχύει $a - \epsilon \le a_n \le a + \epsilon$. Έχουμε επίσης, για $n > n_0$,
$$\mu_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots}{n}$$
Εφ' όσον n_0 είναι σταθερό το όριο του πρώτου προσθετέου δεξιά είναι 0, άρα το όριο του μ_n είναι το όριο του δεύτερου όρου (αν υπάρχει). Ας είναι $s_n = \dfrac{a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n}{n}$. Τότε έχουμε
$$(a - \epsilon)\frac{n - n_0}{n} \le s_n \le (a + \epsilon)\frac{n - n_0}{n}.$$
Από την αριστερή ανισότητα προκύπτει η ανισότητα $\liminf s_n \ge a - \epsilon$ ενώ από τη δεξιά ανισότητα προκύπτει η ανισότητα $\limsup s_n \le a + \epsilon$. Έχουμε δείξει λοιπόν, για κάθε $\epsilon > 0$,
$$a - \epsilon \le \liminf s_n \le \limsup s_n \le a + \epsilon.$$
Άρα $\liminf s_n = \limsup s_n = a$, και άρα $\lim \mu_n = \lim s_n = a$.

Για παράδειγμα ακολουθίας όπου έχουμε σύγκλιση των μέσων όρων αλλά όχι της ακολουθίας μπορούμε να πάρουμε, π.χ., την ακολουθία $a_n = (-1)^n$, η οποία προφανώς δε συγκλίνει αλλά οι μέσοι όροι της είναι $|\mu_n| \le \frac{1}{n}$ και άρα $\mu_n \to 0$. Μια άλλη λύση είναι να πάρουμε την ακολουθία
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \text{ τέλειο τετράγωνο} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$
Και αυτή η ακολουθία προφανώς δε συγκλίνει (παίρνει άπειρες φορές την τιμή 0 και άπειρες φορές την τιμή 1) και οι μέσοι όροι της φράσσονται ως
$$\mu_n = \frac{\text{πόσα τέλεια τετράγωνα υπάρχουν πριν το } n}{n} \le \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$