Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - Άνοιξη 2025-26 - Λύσεις προβλημάτων 2ου διαγωνίσματος - Μ. Κολουντζάκης

Λύσεις των ασκήσεων

1 Να δειχθεί ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^3 \cos(nx)}{n^{10}}$$
συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ σε μια συνεχή συνάρτηση.

***Λύση*:** Θέτουμε
$$u_n(x) = \frac{(x+n)^3 \cos(nx)}{n^{10}}.$$
Κάθε u_n είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο διάστημα. Έστω λοιπόν $R > 0$ και $x \in [-R, R]$. Τότε
$$|u_n(x)| \le \frac{|x+n|^3}{n^{10}} \le \frac{(n+R)^3}{n^{10}}.$$
Για κάθε $n \ge 1$ έχουμε
$$n + R \le (1+R)n,$$
άρα
$$(n+R)^3 \le (1+R)^3 n^3.$$
Επομένως
$$|u_n(x)| \le \frac{(1+R)^3}{n^7}.$$
Η αριθμητική σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+R)^3}{n^7}$$
συγκλίνει. Άρα, από το κριτήριο Weierstrass, η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^3 \cos(nx)}{n^{10}}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R, R]$.

Εφόσον κάθε όρος της σειράς είναι συνεχής, το άθροισμα είναι συνεχής συνάρτηση στο $[-R, R]$. Επειδή το $R > 0$ είναι αυθαίρετο, το άθροισμα είναι συνεχές σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άρα η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ σε μια συνεχή συνάρτηση.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η σειρά δε συγκλίνει ομοιόμορφα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

2 Αν $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\varepsilon > 0$, να δειχθεί ότι υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [1,2]$ να ισχύει

$$\left| f(x) - p\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Λύση: Θέτουμε

$$y = \frac{1}{2x+1}.$$

Για $x \in [1,2]$ έχουμε

$$y \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right].$$

Η απεικόνιση

$$x \mapsto \frac{1}{2x+1}$$

είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[1,2]$, άρα έχει συνεχή αντίστροφη. Λύνοντας ως προς x, παίρνουμε

$$x = \frac{1/y - 1}{2} = \frac{1-y}{2y}.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(y) = f\left(\frac{1-y}{2y}\right), \qquad y \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right].$$

Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$.

Από το θεώρημα Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$|h(y) - p(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{για κάθε } y \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right].$$

Θέτοντας τώρα

$$y = \frac{1}{2x+1},$$

παίρνουμε για κάθε $x \in [1,2]$

$$\left| f(x) - p\left(\frac{1}{2x+1}\right) \right| = |h(y) - p(y)| \leq \varepsilon.$$

3 Έχουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $f_n \to f$ κατά σημείο. Επίσης για κάθε φραγμένο διάστημα (a,b) η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Ισχύει ότι η f είναι συνεχής παντού;

Λύση: Ναι, ισχύει.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Παίρνουμε το φραγμένο διάστημα

$$I = (x_0 - 1, x_0 + 1).$$

Από την υπόθεση, η σύγκλιση $f_n \to f$ είναι ομοιόμορφη στο I.

Κάθε f_n είναι συνεχής στο I, άρα από το θεώρημα ότι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχές, συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο I, και ειδικότερα στο σημείο x_0.

Επειδή το x_0 ήταν αυθαίρετο, η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

4 Αν $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\varepsilon > 0$, να δειχθεί ότι υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [1,2]$ να ισχύει

$$\left| g(x) - p\left(\frac{1}{x+1}\right) \right| \le \varepsilon.$$

Λύση: Θέτουμε

$$y = \frac{1}{x+1}.$$

Για $x \in [1,2]$ έχουμε

$$y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Η απεικόνιση

$$x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[1,2]$, άρα έχει συνεχή αντίστροφη. Πράγματι,

$$x = \frac{1}{y} - 1.$$

Ορίζουμε

$$h(y) = g\left(\frac{1}{y} - 1\right), \qquad y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Με το θεώρημα Weierstrass, υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$|h(y) - p(y)| \le \varepsilon \qquad \text{για κάθε } y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Θέτοντας τώρα

$$y = \frac{1}{x+1},$$

παίρνουμε για κάθε $x \in [1,2]$

$$\left| g(x) - p\left(\frac{1}{x+1}\right) \right| = |h(y) - p(y)| \le \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο p.