Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων – Τομεας Αναλυσης
Λεωφ. Κνωσου, 714 09 Ηρακλειο. Τηλ: +30 2810393801, Fax +30 2810393881

Μιχαλης Κολουντζακης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2005-06

**Θεωρία Μέτρου**

Πρώτο Διαγώνισμα

**1.** (α) Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, όπου $X$ ένας χώρος με μέτρο $\mu$. Δείξτε ότι αν τα σύνολα

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}, \quad (\alpha \in \mathbb{Q}),$$

είναι μετρήσιμα τότε η συνάρτηση $f$ είναι μετρήσιμη (δηλ. η συνθήκη $\alpha \in \mathbb{Q}$ μπορεί να απαλειφθεί).
(β) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι άθροισμα μετρησίμων συναρτήσεων από τον $X$ στο $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

**2.** (α) Αν $f \in L^p(\mu)$, $0 < p < \infty$, δείξτε ότι

$$\mu\{x : \ |f(x)| > \lambda\} \le \lambda^{-p} \int |f|^p d\mu.$$

(β) Δείξτε ότι δεν ισχύει η άνω ανισότητα αν ο εκθέτης του $\lambda$ στο δεξί μέλος αντικατασταθεί από ένα αριθμό $-q$, με $q > p$. (*Υπόδειξη*: Εξετάστε τη συνάρτηση $f(x) = x^{-\alpha}\mathbf{1}\,(x > 1)$, για κατάλληλες τιμές του $\alpha$, και για το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.)

**3.** Έστω $X$ συμπαγής μετρικός χώρος και $\mu$ πεπερασμένο θετικό Borel μέτρο πάνω στον $X$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\mu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν η διάμετρος του Borel συνόλου $A$ είναι $< \delta$ τότε να έπεται $\mu(A) < \epsilon$.

**4.** Έστω $p_1, p_2, p_3$ αριθμοί στο διάστημα $(1, \infty)$ τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$, και $f, g, h$ μετρήσιμες συναρτήσεις σ'ένα χώρο μέτρου $(X, \mu)$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_X fgh d\mu \right| \le \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2} \|h\|_{p_3}.$$

**5.** Θεωρείστε ως δεδομένη την ανισότητα Hölder για γενικούς χώρους μέτρου και δείξτε με λεπτομέρειες πώς αυτή συνεπάγεται την ανισότητα

$$\left| \sum_{j=1}^N a_j b_j w_j \right| \le \left( \sum_{j=1}^N |a_j|^p w_j \right)^{1/p} \left( \sum_{j=1}^N |b_j|^q w_j \right)^{1/q},$$

για $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $w_j \ge 0$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.