

Παραδώστε τις λύσεις στο μάθημα της Πέμπτης 5/3/2020. Παραδώστε και τις προηγούμενες που ξεχάσατε να παραδώσετε την Πέμπτη αυτή. Γράφεται σύντομα και περιεκτικά.

1. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $f * g \in C(\mathbb{T})$.

💡 Γράψτε το $f * g(x_0) - f * g(x_0 + h)$ σαν ένα ολοκλήρωμα και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να δείξετε ότι πάει στο 0 για $h \rightarrow 0$.

2. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $f * g \in C^1(\mathbb{T})$ και ότι

$$(f * g)' = f * g'.$$

💡 Εκφράστε τη διαφορά $f * g'(x_0) - \frac{1}{h}(f * g(x_0 + h) - f * g(x_0))$ σαν ένα ολοκλήρωμα και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να δείξετε ότι πάει στο 0 για $h \rightarrow 0$.

3. Βρείτε ένα κλειστό τύπο για τον πυρήνα του Dirichlet τάξης N :

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx}.$$

💡 Χρησιμοποιήστε τον τύπο για την πεπερασμένη γεωμετρική σειρά $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$, για $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.