Σύγκλιση και φραγμένοι τελεστές

$\sigma_N f = \frac{S_0 f + S_1 f + \dots + S_N f}{N+1}$ Fejér

Σύγκλιση $S_N f \to f$ ή $\sigma_N f \to f$ είναι προφανής αν f τριγων. πολυώνυμο.

$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$

$N \ge n: \ S_N f \equiv f$

Τριγων. πολυώνυμα είναι *πυκνά* σε $C(\mathbb{T})$, $L^p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$.

Υπάρχει τρόπος να επεκτείνουμε τη σύγκλιση σε όλο το χώρο μέσω των τριγων. πολυωνύμων;

Σύγκλιση και φραγμένοι τελεστές

$T_N = S_N$, σ_N $T = Id$
$f \to f$

χώρος Banach

Θεώρημα

Αν $T, T_N : X \to X$, φραγμένοι τελεστές, και $T_N f \to Tf$ για ένα πυκνό σύνολο από $f \in X$ τότε

$\|T_N\| < \infty : \forall x \in X : \|T_N x\| \leq M_N \|x\|$

$$\forall f \in X : T_N f \to Tf \iff \|T_N\| \leq M \text{ για κάποιο } M. \checkmark$$

$\forall f \in X : \|T_N f\| \leq M(f)$

$\Longrightarrow$

Για $f \in X$ έχουμε $T_N f$ συγκλίνει άρα $\|T_N f\|$ φραγμένη ακολουθία.

Tf

Banach – Steinhaus $\Longrightarrow$ $\|T_N\|$ φραγμένη ακολουθία.

$\exists M : \|T_N\| \leq M$

Σύγκλιση και φραγμένοι τελεστές

Θεώρημα

Αν $T, T_N : X \to X$, φραγμένοι τελεστές, και $T_N f \to Tf$ για ένα πυκνό σύνολο από $f \in X$ τότε

$$\forall f \in X : T_N f \to f \iff \|T_N\| \le M \text{ για κάποιο } M.$$

$\Longleftarrow$ Έστω $\epsilon > 0$ και $f \in X$. Παίρνουμε $g \in X$ τ.ώ. $\|f - g\| \le \epsilon$ και $T_N g \xrightarrow{N} g$.

τριγ. ανισ.

$T_N f \to f$

$$\begin{aligned}
\|T_N f - f\| &\le \|T_N f - T_N g\| + \|T_N g - g\| + \|g - f\| \\
&\le \|T_N (f-g)\| + \|T_N g - g\| + \|g - f\| \\
&\le \|T_N\| \cdot \|f - g\| + \|T_N g - g\| + \|g - f\| \\
&\le M \|f - g\| + \|T_N g - g\| + \|g - f\| \quad \le (2+M)\varepsilon
\end{aligned}$$

$\le M \cdot \varepsilon$ $\quad$ $\le \varepsilon$ αν N μεγ. $\quad$ $\le \varepsilon$

Όχι σύγκλιση στο $L^1(\mathbb{T})$: Δεν ισχύει $\|S_N f - f\|_1 \to 0 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{T})$

Πόρισμα

Δεν ισχύει $S_N f \xrightarrow{N} f$ *για κάθε* $f \in L^1(\mathbb{T})$.

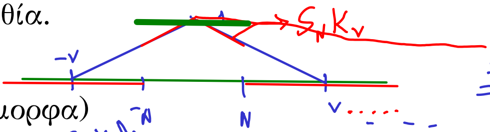
Έχουμε σύγκλιση για τριγων. πολυώνυμα και άρα θα έπρεπε $\quad \|S_N\| \le M_N$

$$\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})}$$

$$\|S_N f\|_1 = \|f * D_N\|_1 \le \|D_N\|_1 \cdot \|f\|_1$$

να είναι φραγμένη ακολουθία.

Σταθερ. το N



$$\|S_N\| \le \|D_N\|_1$$

Όμως: $S_N \boxed{K_\nu} \xrightarrow{\nu} D_N$ (ομοιόμορφα)

πυρ. Fejér $\|K_\nu\|_1 = 1$

$$\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} \ge \frac{\|S_N K_\nu\|_1}{\|K_\nu\|_1} \ge \frac{\|D_N\|_1}{1\ldots} \sim C\log N. \quad \gtrsim c\log N \to \infty$$

$$|S_N K_\nu(x) - D_N(x)| \le \overbrace{\sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\left|\widehat{S_N K_\nu}(k) - 1\right|}_{\le \epsilon} |e^{ikx}|}^{\le N\epsilon}$$

Σύγκλιση στο $L^2(\mathbb{T})$

$\|S_N f - f\|_2 \xrightarrow{N} 0$

Πόρισμα

Έχουμε σύγκλιση $S_N f \to f$ για $f \in L^2(\mathbb{T})$.

$\|S_N f - f\|_2^2 = \sum_{|k| \geq N+1} |\hat{f}(k)|^2 \xrightarrow[N]{} 0$

Αρκεί να είναι φραγμένη η ακολουθία

$$\|S_N\|_{L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})}$$

Έχουμε $f \in L^2$

$$\|S_N f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Άρα

$$\|S_N\|_{L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})} \leq 1. \quad \forall N$$

→ Αποδεικνύεται ότι για $1 < p < \infty$ (L^p) επίσης έχουμε $\|S_N f - f\|_p \to 0$

Σύγκλιση και παράγωγος σε ένα σημείο

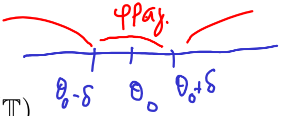
Θεώρημα $f \in L^1$

Αν $f'(\theta_0)$ υπάρχει για κάποιο $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ τότε $S_N f(\theta_0) \xrightarrow{N} f(\theta_0)$.

$f(\theta_0) * D_N$

$$
\begin{aligned}
S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) &= f * D_N(\theta_0) - f(\theta_0) \\
&= \int (f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)) D_N(t)\,dt \qquad (\text{αφού } \textstyle\int D_N = 1) \\
&= \int F(t) \cdot t \cdot D_N(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

$|t| > \delta$



όπου

$$
F(t) = \begin{cases} \frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} & (0 < |t| < \pi) \\ -f'(\theta_0) & (t = 0). \end{cases} \in L^1(\mathbb{T}).
$$

Σύγκλιση και παράγωγος σε ένα σημείο

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = \int F(t) \cdot t \cdot D_N(t)\, dt$$

Έχουμε

$$tD_N(t) = \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t = \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sin Nt \cos\frac{t}{2} + \cos Nt \sin\frac{t}{2}\right).$$

Άρα

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(F(t)\frac{t}{\sin(t/2)}\cos(t/2)\right)}_{L^1} \sin Nt\, dt + \int_0^{2\pi} \underbrace{(F(t)t)}_{L^1} \cos Nt\, dt,$$

Λήμμα Riemann–Lebesgue $\Longrightarrow$ τα δύο αυτά ολοκληρώματα $\to 0$.

$N \to \infty$

$f \in L^1$: $\int f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow{n} 0$

$\sin Nt = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

Σύγκλιση και συνθήκη Lipschitz

Η παραγωγισιμότητα στο θ_0 χρησιμοποιήθηκε μόνο στο ότι

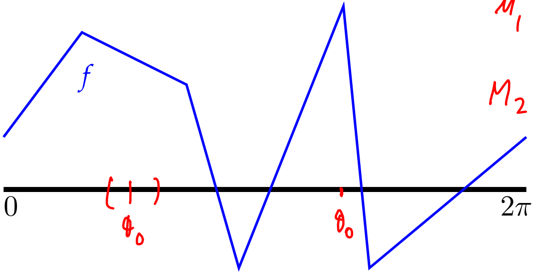
$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0)}{t} & (0<|t|<\pi) \\ -f'(\theta_0) & (t=0). \end{cases} \in L^1(\mathbb{T}).$$

Γι' αυτό αρκεί μια συνθήκη Lipschitz: για κάποιο $\delta > 0$

δ

θ_0

✓ $$|f(\theta)-f(\theta_0)| \le M|\theta-\theta_0| \quad \text{για } \theta_0-\delta<\theta<\theta_0+\delta.$$



$$\begin{matrix} M_1 \ge \\ M_2 \ge \end{matrix} \underbrace{\frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{\theta-\theta_0}}_{} \to f'(\theta_0)$$

$\theta \to \theta_0^+ \dashrightarrow f'_+(\theta_0)$

$\theta \to \theta_0^- \dashrightarrow f'_-(\theta_0)$

Αρχή τοπικότητας για τη σύγκλιση

$a \quad \theta_0 \quad b$

Θεώρημα

Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ *και* $f \equiv g$ *στο ανοιχτό διάστημα* $(a,b) \subseteq \mathbb{T}$ *τότε*

$$\forall \theta \in (a,b): \quad \underbrace{S_N f(\theta) \xrightarrow{N} f(\theta)} \Longleftrightarrow S_N g(\theta) \xrightarrow{N} g(\theta)$$

$h = f - g \equiv 0$ στο (a,b)

$h'(\theta_0) = 0 \qquad \theta_0 \in (a,b)$

$S_N h(\theta_0) \to 0 \iff S_N f(\theta_0) - S_N g(\theta_0) \to 0$

$S_N f(\theta_0) \to f(\theta_0)$, $\ ) \to 0$, $\ ) \to 0$

$f(\theta_0) = g(\theta_0)$

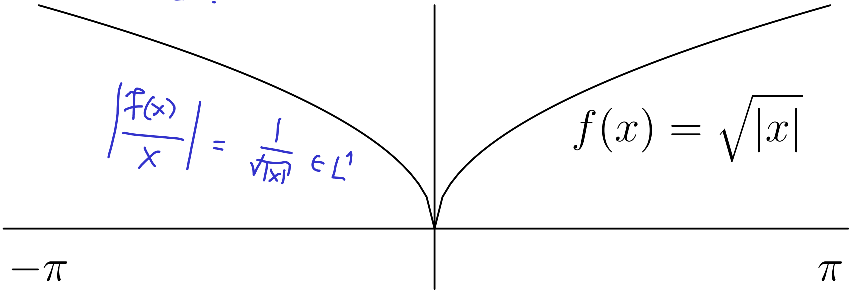
Το κριτήριο του Dini $f \in L^1$

$|t| < \delta$

Lipschitz στο θ_0: η συνάρτηση $\frac{1}{t}|f(\theta_0+t) - f(\theta_0)|$ είναι φραγμένη. $\Rightarrow$ ολοκληρώσιμη $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$

Θεώρημα (Dini)

Αν $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{t}(f(\theta_0+t) - f(\theta_0)) \right| dt < \infty$ τότε $S_N f(\theta_0) \xrightarrow{N} f(\theta_0)$.



$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \in L^1$

Το κριτήριο του Dini: απόδειξη

Αν $f(0)=0$ και $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t)}{t}\right|dt<\infty$ τότε $S_Nf(0)\xrightarrow{N}0$.

$\theta_0=0,\ f(0)=0$

$$\frac{f(t)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{f(t)}{t/2}\,\frac{t/2}{\sin t/2}$$

$$\downarrow t\to 0$$

$$1$$

$$
\begin{aligned}
S_Nf(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sin(t/2)\cos Nt+\cos(t/2)\sin Nt\right)dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos Nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\left(\frac{f(t)}{\sin\frac{t}{2}}\cos(t/2)\right)}_{\in L^1(\mathbb{T})}\sin Nt\,dt,
\end{aligned}
$$

$\xrightarrow{N} 0$ από το Λήμμα Riemann–Lebesgue.

Το κριτήριο του Hardy

$|\hat{f}(n)| \le \frac{C}{|n|}$ ✓

Θεώρημα (Hardy)

Αν $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$ τότε $S_N f(x)$ και $\sigma_N f(x)$ συγκλίνουν για τα ίδια x.
Αν $\sigma_N f \xrightarrow{N} f$ ομοιόμορφα στο $E \subseteq [0, 2\pi]$ τότε ομοίως και για $S_N f(x)$.

Πόρισμα

Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε $S_N f \xrightarrow{N} f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

Γιατί $\sigma_N f \xrightarrow{N} f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$ (θεώρημα Fejér) και για $n \neq 0$ ισχύει

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{in}\widehat{f'}(n)\right| \le \frac{\|f'\|_1}{|n|}.$$

$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$

$\widehat{f''}(n) = -n^2\hat{f}(n)$

$|\hat{g}(k)| \le \|g\|_1$

$E = \mathbb{T}$

$f \in C^2$

$|\hat{f}(n)| \le \frac{\|f''\|_1}{n^2}$

$\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$

Το κριτήριο του Hardy: απόδειξη

$$\left|\hat{f}(n)\right| \le \frac{C}{|n|}$$

Λήμμα

Για κάθε $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\lambda > 1$ *τ.ώ.*

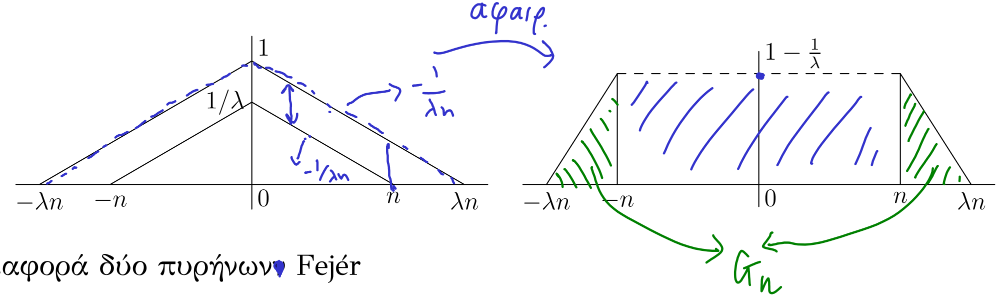
$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{n\le |j| \le \lambda n} \left|\hat{f}(j)\right| < \epsilon.$$

$$\sum_{j=n}^{\lambda n} |\hat{f}(j)| \le C \sum_{j=n}^{\lambda n} \frac{1}{j} \le C \int_n^{\lambda n} \frac{dx}{x} = C\left(\ln(\lambda n) - \ln n\right)$$

$$= C \ln \lambda \le \epsilon$$

1 λ

Το κριτήριο του Hardy: απόδειξη



Διαφορά δύο πυρήνων Fejér

$$\underline{K_{\lambda n}(x)} - \frac{1}{\lambda}K_n(x) = (1-\frac{1}{\lambda})\underline{D_n(x)} + (1-\frac{1}{\lambda})G_n(x)$$

όπου

$$\underline{G_n(x)} = \sum_{n\le k\le \lambda n}\left(1-\frac{k-n}{(\lambda-1)n}\right)(e^{ikx}+e^{-ikx})$$

Το κριτήριο του Hardy: απόδειξη

$\boxed{D_n = \frac{\lambda}{\lambda-1} K_{\lambda n} - \frac{1}{\lambda-1} K_n - G_n}$ δίνει

$$S_n(f)(x) = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda-1}\sigma_{\lambda n}(f)(x) - \frac{1}{\lambda-1}\sigma_n(f)(x)}_{\xrightarrow{n} \lim_n \sigma_n f(x)} - f * G_n(x).$$

$\widehat{f * G_n}(k) = \hat{f}(k)\,\widehat{G_n}(k)$

και

$$f * G_n(x) = \sum_{n \le |j| \le \lambda n} \hat{f}(j)\widehat{G_n}(j)e^{ijx} \quad \text{με } \left|\widehat{G_n}(j)\right| \le 1.$$

Άρα

$$|f * G_n(x)| \le \sum_{n \le |j| \le \lambda n} \left|\hat{f}(j)\right| \le \epsilon, \quad \text{αν } n \text{ αρκετά μεγάλο,}$$

ομοιόμορφα ως προς $x \in \mathbb{T}$.

$E \subseteq \mathbb{T}$