Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Τελικό διαγώνισμα, 31 Ιανουαρίου 2011

**Πρόβλημα 1.** $f(x) = e^{ix} + 2e^{i3x} + e^{i4x}$. Βρείτε το $\int_0^{2\pi} |f(x)|^4 \, dx$.

**Πρόβλημα 2.** Έστω $x_n \in [0, 2\pi)$, $n = 1, 2, \ldots$. Ορίστε τι σημαίνει για την ακολουθία $x_n$ να είναι ισοκατανεμημένη στο $\mathbb{T}$ και διατυπώστε το κριτήριο ισοκατανομής του Weyl.

**Πρόβλημα 3.** Αν η ακολουθία $a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, ικανοποιεί την $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$, δείξτε ότι υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ώ. $a_n = \widehat{f}(n)$ για $n \in \mathbb{Z}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο την πληρότητα του $L^2(\mathbb{T})$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, όχι την ισομετρία Parseval.

**Πρόβλημα 4.** Έστω $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \{1, 2, 3, \ldots\}$ με $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ και $f(x) = \sum_{a\in A} e^{iax}$. Ορίζουμε για $k \in \mathbb{Z}$ τη συνάρτηση αναπαράστασης

$$r(k) = |\{(i, j) : \ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad k = a_i - a_j\}|.$$

Υπολογίστε την ποσότητα $\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)^2$ σα συνάρτηση της $\|f\|_4$.

**Πρόβλημα 5.** Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(k)\right| < \infty$.

**Πρόβλημα 6.** Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια $2\pi$-περιοδική συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

για μια πεπερασμένη σταθερά $M$, δείξτε ότι $\left|\widehat{f}(n)\right| = O(1/|n|)$.

**Πρόβλημα 7.** Αν $0 < M < N$ και η $2\pi$-περιοδική $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι τ.ώ. οι συντελεστές Fourier $\widehat{g}(n)$ είναι (α) 0 αν $|n| \ge N$, (β) 1 αν $|n| \le M$ και (γ) $1 - t$ αν $n = tN + (1 - t)M$ με $t \in (0, 1)$. Δείξτε ότι

$$\|g\|_{L^1} \le \frac{N + M}{N - M}.$$