Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 7 – 10-11-2016. Παραδοτέες 24-11-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι το θεώρημα του Baire δεν ισχύει στο μετρικό χώρο των ρητών αριθμών (ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης).

Λύση: Αν r_n είναι μια αρίθμηση των ρητών τότε τα σύνολα $\{r_n\}^c$ είναι ανοιχτά και πυκνά αλλά η τομή τους είναι το κενό σύνολο, και όχι ένα πυκνό σύνολο όπως προβλέπεται από το θεώρημα του Baire.

Πρόβλημα 2. Αν V είναι ένας χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης (με άλλα λόγια, αν V είναι ο $\mathbb{C}^n$ ή ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με κάποια νόρμα) τότε όλοι οι γραμμικοί τελεστές πάνω στο V είναι φραγμένοι.

Υπόδειξη: Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$ κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές.

Λύση: Ας είναι $\Lambda : V \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής προς ένα χώρο με νόρμα Y. Η μοναδιαία σφαίρα του V είναι συμπαγές σύνολο (στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{C}^n$ ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο†), και η συνάρτηση $v \to \|v\|$ είναι συνεχής στο V, άρα υπάρχει μοναδιαίο $v \in V$ τέτοιο ώστε $\|\Lambda v\| = \sup_{\|w\|=1} \|\Lambda w\|$, άρα $\|\Lambda\| = \|\Lambda v\| < \infty$.

Λίγο πιο απλά, η συνεχής συνάρτηση $\|\Lambda w\|$ για w στο συμπαγές σύνολο $\{w \in V : \|w\| = 1\}$ είναι φραγμένη.

†: Κλειστό και φραγμένο ως προς ποια μετρική; Δεν έχει σημασία: όλες οι νόρμες σε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες, ορίζουν δηλαδή την ίδια τοπολογία. Με άλλα λόγια έννοιες όπως σύγκλιση ακολουθίας, ανοιχτό ή κλειστό σύνολο, ή φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R}^d$ ή $\mathbb{C}^d$ δεν αλλάζουν αν αλλάξουμε τη νόρμα ως προς την οποία τις ορίζουμε. Τα ανοιχτά σύνολα, π.χ., ως προς μια νόρμα είναι τα ίδια με τα ανοιχτά σύνολα ως προς οποιαδήποτε άλλη νόρμα. Πώς μπορεί να το δείξει κανείς αυτό; Είναι πολύ απλό να δει κανείς ότι αν δύο νόρμες $\|\cdot\|_a$ και $\|\cdot\|_b$ ικανοποιούν μια ανισότητα της μορφής

$$C_1\|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2\|x\|_a, \quad \text{για κάθε } x \text{ στο χώρο μας,} \tag{1}$$

(όπου $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ είναι σταθερές) τότε αυτές οι νόρμες είναι ισοδύναμες. Είναι επίσης σχεδόν προφανές ότι αν δύο νόρμες είναι ισοδύναμες προς τρίτη τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμες. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε, για μια τυχαία νόρμα $\|\cdot\|$ στο $\mathbb{R}^d$ ότι ισχύει μια ανισότητα όπως η παραπάνω ανάμεσα σε αυτή τη νόρμα και την συνηθισμένη μας ℓ^2 (Ευκλείδια) νόρμα, που συνήθως τη συμβολίζουμε $|\cdot|$.

Αφού ο χώρος μας έχει πεπερασμένη διάσταση υπάρχει μια βάση του $e_1, e_2, \ldots, e_d$. Γράφουμε για το τυχόν διάνυσμα x του χώρου μας

$$x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j,$$

και έχουμε τότε

$$\|x\| \le \sum_{j=1}^{d} |x_j|\|e_j\| \le M \sum_{j=1}^{d} |x_j| \le M\sqrt{d}|x|, \tag{2}$$

όπου $M = \max_{j=1,\ldots,d} \|e_j\|$. Από την ανισότητα αυτή έπεται ότι η συνάρτηση $x \to \|x\|$ είναι συνεχής συνάρτηση υπό την Ευκλείδια νόρμα, αφού αν $x_n \to x$ (Ευκλείδια νόρμα), τότε $\|x_n - x\| \le M\sqrt{d}|x_n - x| \to 0$.

Αφού η συνάρτηση $x \to \|x\|$ είναι συνεχής συνάρτηση (ως προς την Ευκλείδια μετρική) σε όλο το χώρο και μάλιστα είναι θετική εκτός του 0, έπεται ότι στην Ευκλείδια μοναδιαία σφαίρα, που είναι φραγμένο και κλειστό σύνολο, και άρα συμπαγές, η συνάρτηση αυτή λαμβάνει και το ελάχιστο και το μέγιστό της, τα οποία είναι μη μηδενικά και πεπερασμένα. Υπάρχουν λοιπόν αριθμοί $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ τέτοιοι ώστε για $|x| = 1$ να ισχύει $C_1 \le \|x\| \le C_2$. Βάζοντας στη θέση του (μοναδιαίου) x το διάνυσμα $\frac{1}{|x|}x$ παίρνουμε την (1).

Πρόβλημα 3. Δεν είναι εύκολο το να βρει κανείς μη φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή ή τελεστές πάνω σε ένα χώρο Banach. Αν ο χώρος δεν είναι πλήρης, είναι απλά δηλ. ένας χώρος με νόρμα, τότε είναι πιο απλό. Πάρτε, για παράδειγμα, το χώρο $X = C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $[0,1] \to \mathbb{C}$, με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Δείξτε ότι ο X δεν είναι πλήρης χώρος. Δείξτε επίσης ότι η απεικόνιση $X \to \mathbb{C}$ που στέλνει $f \to f'(1/2)$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές αλλά όχι συνεχές (φραγμένο).

Λύση: Για να δείξουμε ότι ο χώρος X δεν είναι πλήρης αρκεί να βρούμε μια ακολουθία Cauchy που δε συγκλίνει. Συνήθως το απλούστερο είναι να βρει κανείς μια *συγκλίνουσα* ακολουθία που όμως συγκλίνει σε μια συνάρτηση εκτός του χώρου μας (ο χώρος μας, σε αυτή την περίπτωση, είναι υπόχωρος κάποιου ευρύτερου χώρου με την ίδια νόρμα). Στην περίπτωσή μας δηλ. ψάχνουμε για μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων που συγκλίνουν ομοιόμορφα σε μια μη παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση x^α είναι παραγωγίσιμη στο 0 από δεξιά (από αριστερά δεν ορίζεται παρά μόνο για συγκεκριμένους εκθέτες) αν $\alpha > 1$ και μάλιστα η παράγωγος είναι 0 στο 0. Πάρτε λοιπόν τις συναρτήσεις

$$f_n(x) = \mathbf{1}\left(x \ge \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Οι συναρτήσεις αυτές συγκλίνουν ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = \mathbf{1}\left(x \ge \frac{1}{2}\right) \cdot (x - \frac{1}{2})$ (αυτό μπορείτε να το δείξετε, π.χ., με το θεώρημα μέσης τιμής), όμως η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1/2 (έχει διαφορετικές πλευρικές παραγώγους) και άρα δεν είναι στοιχείο του X (είναι όμως στοιχείο του ευρύτερου χώρου $C([0,1])$).

Για να δούμε ότι το συναρτησοειδές $f \to f'(1/2)$ δεν είναι φραγμένο στον X, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση xe^{-x^2} είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = f(n(x - 1/2))$ που είναι στοιχεία του X με φραγμένη νόρμα. Υπολογίζουμε $f_n'(1/2) = n$, άρα το συναρτησοειδές δεν είναι φραγμένο. (Κάντε και τα γραφήματα των f_n για να καταλάβετε γιατί δουλεύει το παράδειγμα.)

Πρόβλημα 4. Σε ένα χώρο με νόρμα δείξτε ότι κάθε γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης είναι κλειστός.

Λύση: Ας είναι X ένας χώρος με νόρμα και V ένας υπόχωρός του πεπερασμένης διάστασης. Ας είναι $x_n \in V$ μια συγκλίνουσα ακολουθία με όριο το $x \in X$. Πάντα ισχύει $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. Τα στοιχεία $x_n/\|x_n\|$ ανήκουν στη μοναδιαία σφαίρα του V που είναι (όπως γράψαμε και στο Πρόβλημα 2) ένα συμπαγές σύνολο, άρα υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών n_k και u στη μοναδιαία σφαίρα του V τέτοια ώστε $x_{n_k}/\|x_{n_k}\| \to u$. Αφού $\|x_{n_k}\| \to \|x\|$ έχουμε λοιπόν ότι $x_{n_k} \to \|x\|u$ που είναι στοιχείο του V. Αφού όμως η x_n είναι συκλίνουσα ακολουθία έπεται ότι $x = \|x\|u \in V$ όπως έπρεπε να δείξουμε.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι ο χώρος X των ακολουθιών $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ που συγκλίνουν στο 0 και με τη νόρμα $\|(a_1, a_2, \ldots)\| = \sup_n |a_n|$ είναι πλήρης.

Λύση: Ας είναι $a^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots) \in X$ μια ακολουθία Cauchy. Αφού $\left|a_j^n - a_j^m\right| \le \|a^n - a^m\|_\infty$ έπεται ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ η ακολουθία a_j^n είναι Cauchy, και άρα συγκλίνουσα (οι μιγαδικοί αριθμοί είναι πλήρης μετρικός χώρος), και ας είναι $a_j = \lim_n a_j^n$ και $a = (a_1, a_2, \ldots)$.

Έστω $\epsilon > 0$ και n_0 τέτοιο ώστε $\|a^m - a^n\|_\infty \le \epsilon$ αν $m, n \ge n_0$

Ας είναι $n \ge n_0$. Τότε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $m \ge n_0$ έχουμε

$$\left|a_j^n - a_j\right| \le \left|a_j^n - a_j^m\right| + \left|a_j^m - a_j\right| \le \|a^n - a^m\|_\infty + \left|a_j^m - a_j\right| \le \epsilon + \left|a_j^m - a_j\right|,$$

και, αφήνοντας $m \to \infty$, παίρνουμε $\left|a_j^n - a_j\right| \le \epsilon$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, που συνεπάγεται $\|a^n - a\|_\infty \le \epsilon$ και άρα $\|a^n - a\|_\infty \to \infty$. (Μέχρι στιγμής έχουμε ουσιαστικά αποδείξει την πληρότητα του χώρου των φραγμένων ακολουθιών $\ell^\infty(\mathbb{N})$.)

Απομένει να δείξουμε ότι $a \in X$, ότι δηλ. $\lim_j a_j = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$|a_j| \le \left|a_j^n - a_j\right| + \left|a_j^n\right| \le \|a^n - a\|_\infty + \left|a_j^n\right|.$$

Διαλέγουμε n τέτοιο ώστε $\|a^n - a\|_\infty \le \epsilon$ καί έτσι έχουμε $\limsup_j |a_j| \le \epsilon + \limsup_j \left|a_j^n\right| = \epsilon$, άρα $\lim_j a_j = 0$.

Πρόβλημα 6. Η ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε οποτεδήποτε η ακολουθία πραγματικών b_n συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει επίσης. Δείξτε ότι $\sum_n |a_n| < \infty$.

Λύση: Ισχύει και για μιγαδικά a_n. Ας είναι $\epsilon_n \ge 0$ οποιαδήποτε ακολουθία που τείνει στο 0. Παίρνουμε $b_n = \dfrac{\overline{a_n}\epsilon_n}{|a_n|}$, που συγκλίνει στο 0. Τότε έχουμε από την υπόθεση $\sum_n |a_n|\epsilon_n < \infty$. Αν, αντίθετα με αυτό που θέλουμε να δείξουμε, ισχύει $S_N = \sum_1^N |a_n| \to \infty$ τότε παίρνουμε $\epsilon_n = \dfrac{1}{\sqrt{S_n}} \to 0$ και έχουμε

$$\sum_1^N |a_n|\epsilon_n \ge \sum_1^N |a_n| \frac{1}{\sqrt{S_N}} = \sqrt{S_N} \to \infty,$$

που αντιφάσκει με τη σύγκλιση της σειράς $\sum_n |a_n|\epsilon_n$.

Πρόβλημα 7. Ας είναι X ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, και πλήρης και με τις δύο νόρμες. Αν υπάρχει πεπερασμένη σταθερά M τέτοια ώστε $\|x\|_2 \le M\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$, τότε υπάρχει και πεπερασμένη σταθερά M' ώστε να ισχύει $\|x\|_1 \le M'\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης.

Λύση: Η ταυτοτική απεικόνιση από το χώρο $(X, \|\cdot\|_1)$ στο χώρο $(X, \|\cdot\|_2)$ είναι φυσικά 1-1 και επί, και από την υπόθεση $\|x\|_2 \le M\|x\|_1$ είναι συνεχής. Από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης και η αντίστροφη απεικόνιση είναι συνεχής, άρα και φραγμένη, οπότε υπάρχει $M' < \infty$ τέτοιο ώστε $\|x\|_1 \le M'\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$.

Πρόβλημα 8. Αν X είναι χώρος Banach και οι φραγμένοι τελεστές $T_n : X \to Y$ συγκλίνουν για κάθε $x \in X$ (δηλ. υπάρχει το όριο $\lim_n T_n x$ για κάθε $x \in X$), τότε ορίζεται ο τελεστής

$$Tx = \lim_n T_n x$$

που εύκολα βλέπουμε ότι είναι γραμμικός. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Banach-Steinhaus.

Λύση: Αφού η ακολουθία $T_n x$ είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη για κάθε x, άρα, από το θεώρημα Banach-Steinhaus υπάρχει μια πεπερασμένη σταθερά C τέτοια ώστε $\|T_n x\| \le C\|x\|$ για κάθε $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Αλλά $\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \le C\|x\|$, δηλ. ο T είναι φραγμένος τελεστής.

Πρόβλημα 9. Ας είναι X ο γραμμικός χώρος όλων των πολυωνύμων της μορφής $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$, και $p_j \in \mathbb{C}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ποσότητα $\|p\| = \max_j |p_j|$ είναι νόρμα στο χώρο αυτό. Δείξτε ότι ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος Banach-Steinhaus αποτυγχάνει για κατάλληλη επιλογή φραγμένων συναρτησοειδών Λ_n στον X.

Λύση:

Ας είναι $\Lambda_n(p) = p^{(n)}(0) = n! p_n$ (n-οστή παράγωγος). Εύκολα βλέπουμε ότι $|\Lambda_n(p)| \le n!\|p\|$ και άρα τα συναρτησοειδή Λ_n είναι φραγμένα και η ακολουθία $\Lambda_n(p)$ είναι φραγμένη για κάθε p στο X. Όμως $\|x^n\| = 1$ και $\Lambda_n(x^n) = n!$ που δε φράσσεται από σταθερά επί $\|x^n\|$. Άρα το θεωρημα Banach-Steinhaus αποτυγχάνει και συνεπώς ο χώρος δεν είναι πλήρης.

Πρόβλημα 10. Ας είναι $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε για κάθε αναδιάταξη π των φυσικών αριθμών (αυτό σημαίνει $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι 1-1 και επί) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Δείξτε ότι $\sum_n |a_n| < \infty$.

Λύση:

Ας είναι a'_n η ακολουθία των θετικών όρων της a_n και $-a''_n$ η ακολουθία των αρνητικών όρων (τα μηδενικά της ακολουθίας δεν έχουν καμία σημασία στα αθροίσματα). Πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_n a'_n < \infty$ και $\sum_n a''_n < \infty$ (τα οποία συνεπάγονται ότι $\sum_n |a_n| < \infty$). Αφού $\sum_n a_n$ είναι συγκλίνουσα σειρά τότε αν μια από τις παραπάνω δύο σειρές θετικών όρων είναι συγκλίνουσα τότε είναι και η άλλη. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι και οι δύο παραπάνω σειρές είναι αποκλίνουσες και ας καταλήξουμε σε άτοπο κατασκευάζοντας μια αρίθμηση των φυσικών αριθμών για την οποία το άθροισμα των a_n (με τη σειρά της αρίθμησης) να μη συγκλίνει.

Παίρνουμε πρώτα στην αρίθμησή μας τόσους όρους από την a'_n ώστε το άθροισμά τους να ξεπεράσει το 1 (αυτό είναι δυνατό γιατί η $\sum_n a'_n$ αποκλίνει). Έπειτα παίρνουμε τόσους όρους από την $-a''_n$ ώστε το άθροισμά τους να είναι < -2 φορές το άθροισμα των όρων a'_n που πήραμε. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε τόσους όρους από την a'_n ώστε το άθροισμά τους να ξεπερνάει το n και αμέσως μετά τόσους όρους από την $-a''_n$ ώστε το άθροισμά τους να είναι < -2 φορές το άθροισμα των όρων a'_n που πήραμε. Οι όροι που παίρνουμε σε κάθε τέτοιο βήμα έχουν άθροισμα $< -n$ με αυτό τον τρόπο, άρα και το μερικό άθροισμα της σειράς που φτιάχνουμε είναι στο τέλος αυτού του βήματος $< -1 - 2 - 3 - \cdots - n$, άρα δε μπορεί η σειρά αυτή να συγκλίνει. Με τον τρόπο που επιλέγουμε τα στοιχεία των a'_n, a''_n τελικά όλοι οι όροι αυτών των ακολουθιών χρησιμοποιούνται (αφού κάθε φορά παίρνουμε από έναν τουλάχιστον), άρα έτσι παράγεται όντως μια αρίθμηση όλων των φυσικών αριθμών, ή, με άλλα λόγια, μια αναδιάταξη της ακολουθίας a_n.

Πρόβλημα 11. Αν μ είναι ένα Borel θετικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του μ ως τη μιγαδική συνάρτηση

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x}\, d\mu(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $\widehat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι απολύτως μικρότερη από $\mu(\mathbb{R})$ αλλά δεν τείνει απαραίτητα στο 0 για $|\xi| \to +\infty$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το μετ. Fourier του μέτρου δ_0, που ορίζεται από: $\delta_0(A) = \mathbf{1}(0 \in A)$, για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$.

Λύση:

Η τριγωνική ανισότητα για το ολοκλήρωμα μας δίνει $|\widehat{\mu}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}} 1\, d\mu(x) = \mu(\mathbb{R})$. Έχουμε επίσης

$$|\widehat{\mu}(\xi + h) - \widehat{\mu}(\xi)| = \left| \int e^{-2\pi i \xi x} (e^{-2\pi i h x} - 1)\, d\mu(x) \right| \le \int \left| e^{-2\pi i h x} - 1 \right| d\mu(x).$$

Το άνω φράγμα τείνει στο 0 για $h \to 0$ αφού ο ολοκληρωτέος φράσσεται από την ολοκληρώσιμη (ως προς μ) συνάρτηση 2, άρα η f είναι συνεχής, και αφού το άνω φράγμα δεν εξαρτάται από τη ξ είναι και ομοιόμορφα συνεχής για $\xi \in \mathbb{R}$.

Αν πάρουμε το μ να είναι μια «μάζα Dirac στο 0», δηλ. το μέτρο που ορίζεται από $\mu(A) = \mathbf{1}(0 \in A)$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε Borel συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ έχουμε $\int f\, d\mu = f(0)$. Πράγματι

$$\int f\, d\mu = \int_{\{0\}} f\, d\mu + \int_{\{0\}^c} f\, d\mu = f(0) + 0.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι 0 αφού $\mu(\{0\}^c) = 0$ και το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με $f(0)$ αφού η συνάρτηση f είναι σταθερή στο σύνολο ολοκλήρωσης και $\mu(\{0\}) = 1$.

Για το μέτρο αυτό λοιπόν έχουμε $\widehat{\mu}(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot 0} = 1$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, άρα δεν τείνει στο 0 για $|\xi| \to \infty$.
