Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

2ο Υπόδειγμα Διαγωνίσματος – Για το διαγώνισμα της 3-11-2016

Πρόβλημα 1. Τα μ, ν είναι δύο θετικά, πεπερασμένα μέτρα στη σ-άλγεβρα των Borel συνόλων του $(0,1)$. Αν $\int f\,d\mu = \int f\,d\nu$ για κάθε συνεχή, πραγματική f στο $(0,1)$ δείξτε ότι τα δύο μέτρα ταυτίζονται.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι τα δύο μέτρα ταυτίζονται σε όλα τα διαστήματα.

Πρόβλημα 2. Αν $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2+\sin(x+y)}\,dy$ δείξτε ότι η F είναι παντού παραγωγίσιμη και βρείτε την παράγωγό της.

Πρόβλημα 3. Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_2 \le C\|f'\|_2$$

όπου C είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από την f.

Υπόδειξη: $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$.

Πρόβλημα 4. Ας είναι μ ένα πεπερασμένο θετικό μέτρο και $f \ge 0$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{f \ge n\} < \infty.$$

Υπόδειξη: $\int f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{n \le f < n+1\}} f\,d\mu + \infty \cdot \mu\{f = +\infty\}$.

Πρόβλημα 5. Οι συναρτήσεις $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες παντού, ισχύει $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $\sup_{n,x} |f_n'(x)| < \infty$. Δείξτε ότι $f_n \to 0$ στο $L^1(0,1)$.

- Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες. Κλειστές σημειώσεις.