Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

**Φυλλάδιο Ασκήσεων 9** – 1-12-2016. Παραδοτέες 8-12-2016 στο μάθημα

**Πρόβλημα 1.** Ας είναι $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής παντού και $\phi \equiv 0$ εκτός του $[-1, 1]$ και $f \in L^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f * \phi$ είναι συνεχής. Αν, επιπλέον, η $\phi$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη παντού δείξτε ότι η $f * \phi$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $(f * \phi)' = f * \phi'$.

**Πρόβλημα 2.** Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη παντού, έχει ολοκλήρωμα 1 και $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ δείξτε ότι, αν $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε $\|f - f * \phi_\epsilon\|_1 \to 0$ για $\epsilon \to 0$. Συμπεράνετε (συνδυάστε με το Πρόβλημα 1) ότι οι $C^\infty$ συναρτήσεις είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$.

**Πρόβλημα 3.** Ας είναι $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\|f\|_1 < 1$. Γράφουμε $f^{*n}$ για τη συνέλιξη τής $f$ με τον εαυτό της $n$ φορές. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f^{*n}$ συγκλίνει στο $L^1(\mathbb{R})$.

**Πρόβλημα 4.** Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

**Πρόβλημα 5.** Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο με θετικό μέτρο δείξτε ότι το σύνολο

$$E - E = \{e_1 - e_2 : e_!, e_2 \in E\}$$

περιέχει ένα διάστημα.

*Υπόδειξη:* Εξετάστε τη συνάρτηση $\mathbf{1}_E * \mathbf{1}_{-E}$.