

Θ. Πιθανοτήτων (μεταπτ.) - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 6 - Μ. Κολουτζάκης

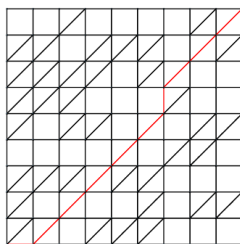
Τελευταία ενημέρωση: **14 Μαΐου 2026**

1 Ας είναι οι X_i ανεξάρτητες, $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$, $\mathbb{P}[X_i = -1] = q = 1 - p$ και $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Δείξτε ότι

$$Z_n = (q/p)^{S_n}$$

είναι martingale ως προς την X_1, \dots, X_n, \dots

2 Έχουμε ένα $n \times n$ πλέγμα δρόμων (οριζόντιοι και κάθετοι). Σε κάθε ένα κελί υπάρχει και ο διαγώνιος δρόμος από κάτω αριστερά έως πάνω δεξιά με πιθανότητα p , ανεξάρτητα για όλα τα κελιά.



Ας είναι X το μήκος ενός ελάχιστου μονοπατιού από την κάτω αριστερά γωνία $(0, 0)$ έως την πάνω δεξιά γωνία (n, n) . Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq C_1 \exp \frac{-t^2}{C_2 n^2},$$

για δύο σταθερές $C_1, C_2 > 0$.

3 Ας είναι f_n, f είναι μη αρνητικές συναρτήσεις στο \mathbb{R} με ολοκλήρωμα 1 και $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

4 Αν F, G είναι δύο συναρτήσεις κατανομής στο \mathbb{R} ορίζουμε

$$\rho(F, G) = \inf \{ \epsilon : F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon \}.$$

Δείξτε ότι είναι μετρική στο χώρο όλων των συναρτήσεων κατανομής (ισοδύναμα: στο χώρο όλων των μέτρων πιθανότητας στο \mathbb{R}) και μάλιστα

$$\rho(F_n, F) \rightarrow 0 \iff F_n \Rightarrow F \text{ (ασθενής σύγκλιση κατανομών)}.$$