Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Θ. Πιθανοτήτων (μεταπτ.) - Άνοιξη 2025-26 - Φυλλάδιο Ασκήσεων 4 - Μ. Κολουντζάκης

Τελευταία ενημέρωση: 18 Μαρτίου 2026

---

1 Αν $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ κατά πιθανότητα δείξτε ότι $X_n Y_n \to XY$ κατά πιθανότητα.

2 Αν $X_n \in \mathbb{R}$ ανεξάρτητες δείξτε ότι η ακολουθία X_n είναι σ.σ. φραγμένη αν και μόνο αν για κάποιο θετικό A ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n > A] < \infty$.

3 Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία πραγματικών τυχαίων μεταβλητών X_n υπάρχει ακολουθία θετικών αριθμών c_n τ.ώ. $\dfrac{X_n}{c_n} \to 0$ σχεδόν σίγουρα.

4 Έστω $\delta > 0$. Το σύνολο $E \subseteq [0,1]$ απαρτίζεται από εκείνα τα $x \in [0,1]$ για τα οποία υπάρχουν άπειρα στο πλήθος ζεύγη $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ τ.ώ. $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^{2+\delta}}$. Δείξτε ότι το E έχει μέτρο 0.

Υπόδειξη: Borel-Cantelli.

5 (α) Χρησιμοποιήστε το λήμμα Borel-Cantelli για να δείξετε την παρακάτω πρόταση (E. Stein, Harmonic Analysis, X.2.1, σελ. 442): αν $E_j \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα μετρήσιμα σύνολα και $\sum_j m(E_j) = \infty$ τότε υπάρχουν $x_j \in \mathbb{R}^d$ τ.ώ. τα σύνολα $E_j + x_j$ καλύπτουν σχεδόν κάθε σημείο του $\mathbb{R}^d$ άπειρες φορές.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι υπό τις παραπάνω υποθέσεις για τα E_j μπορείτε να βρείτε μεταφορές $E_j + x_j$ που καλύπτουν σχεδόν κάθε σημείο του μοναδιαίου κύβου και μάλιστα άπειρες φορές.

(β) Η υπόθεση $\sum_j m(E_j) = \infty$ είναι προφανώς αναγκαία. Δείξτε ότι η υπόθεση τα E_j να είναι ομοιόμορφα φραγμένα είναι αναγκαία κατασκευάζοντας (για $d = 1$) φραγμένα σύνολα E_j για τα οποία $\sum_j m(E_j) = \infty$ αλλά που οποιεσδήποτε μεταφορές τους δεν καλύπτουν κανένα διάστημα μήκους 1.

6 Κατασκευάζουμε ένα τυχαίο γράφημα με n κορυφές G ως εξής: για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών τοποθετούμε μια ακμή ανάμεσά τους με πιθανότητα p ανεξάρτητα από τα άλλα ζεύγη κορυφών. (Αυτό συνήθως ονομάζεται Erdős–Rényi τυχαίο γράφημα $G(n,p)$.) Έστω $c(n,p)$

η πιθανότητα ότι η κορυφή 1 συνδέεται με την κορυφή 2 με κάποιο μονοπάτι (όχι απαραίτητα απ' ευθείας με μια ακμή) στο $G(n,p)$. Δείξτε ότι για σταθερό n η $c(n,p)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του p.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε πρώτα την περίπτωση $n=3$.