---

1 Χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Jensen (στη μορφή $\phi(\mathbb{E}[X]) \le \mathbb{E}[\phi(X)]$) για να δείξετε ότι αν $\phi(x)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση πάνω στο $\mathbb{R}$ και $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $c_1, c_2, \ldots, c_n \ge 0$ είναι τέτοια ώστε $c_1 + \cdots + c_n = 1$ τότε

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} c_j \phi(x_j).$$

2 Ας είναι X μια ΤΜ που παίρνει πεπερασμένες στο πλήθος διαφορετικές τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ με αντίστοιχες πιθανότητες τις $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (όλες οι πιθανότητες αυτές υποτίθενται $\neq 0$). Ορίζουμε τότε

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j.$$

Δείξτε ότι

$$0 \le H(X) \le \log n.$$

Σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα;

Εξηγήστε επίσης γιατί η απαίτηση ότι οι πιθανότητες p_j είναι μη μηδενικές δεν είναι πραγματικά απαραίτητη για να ισχύει το συμπέρασμα. (Η ποσότητα $H(X)$, που εξαρτάται μόνο από την κατανομή της X, λέγεται *εντροπία* της X. Τη σκεφτόμαστε κάπως σαν την «πληροφορία» που μας δίνει ένα δείγμα από την κατανομή της X. Παρατηρήστε π.χ. ότι αν η X είναι σ.σ. (σχεδόν σίγουρα) σταθερή τότε $H(X) = 0$.)

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να δείξετε ότι η $H(X)$ (για σταθερό n) μεγιστοποιείται όταν όλα τα p_j είναι ίδια.

3 (α) X είναι μια πραγματική ΤΜ σε ένα χώρο πιθανότητας. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$$

είναι καλώς ορισμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Αν η ΤΜ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ υπολογίστε τη συνάρτηση $\phi_X(t)$. (Ομοιόμορφα κατανεμημένη σημαίνει ότι η κατανομή μ_X είναι το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[a, b]$ και διαιρεμένο με το $b - a$.)

(γ) Αν $Y = X + a$, για κάποια σταθερά $a \in \mathbb{R}$, βρείτε την συνάρτηση $\phi_Y(t)$ μέσω της $\phi_X(t)$.

(δ) Αν $X_n(\omega) \to X(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει επίσης $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$.

4 Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (η πυκνότητα της τυπικής κανονικής $\mathcal{N}(0,1)$) δείξτε ότι για $x \ge 0$ ισχύει

$$\int_x^\infty f(t)\,dt \le \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

5 Αν $X \ge 0$ είναι μια ΤΜ δείξτε ότι

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > t]\,dt.$$