1. Χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Jensen για να δείξετε ότι αν $\phi(x)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση πάνω στο $\mathbb{R}$ και $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $c_1, c_2, \ldots, c_n \ge 0$ είναι τέτοια ώστε $c_1 + \cdots + c_n = 1$ τότε

$$\phi\left(\sum_{j=1}^n c_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^n c_j \phi(x_j).$$

2. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\mathbb{P}\left[|X-\mu| \ge t\right] \le \frac{\mathbb{E}\left[|X-\mu|^k\right]}{t^k},$$

όπου $\mu = \mathbb{E}[X]$ (υποθέτουμε ότι $X \in L^1$).

3. Αν Y είναι ΤΜ και $Y \le B$, όπου B μια σταθερά, δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[Y \le a] \le \frac{\mathbb{E}[B-Y]}{B-a}$$

για κάθε $a < B$.

4. (α) Αν $k \ge 0$ και $\mathbb{E}\left[|X|^{k+1}\right] < \infty$ δείξτε ότι $\mathbb{E}\left[|X|^k\right] < \infty$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα ΤΜ $X \ge 0$ τέτοιας ώστε $\mathbb{E}[X] < \infty$ και $\mathbb{E}\left[X^2\right] = +\infty$.

5. Ας είναι X μια ΤΜ που παίρνει πεπερασμένες στο πλήθος διαφορετικές τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ με αντίστοιχες πιθανότητες τις $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (όλες οι πιθανότητες αυτές υποτίθενται $\neq 0$). Ορίζουμε τότε

$$H(X) = -\sum_{j=1}^n p_j \log p_j.$$

Δείξτε ότι

$$0 \le H(X) \le \log n.$$

Εξηγείστε επίσης γιατί η απαίτηση ότι οι πιθανότητες p_j είναι μη μηδενικές δεν είναι πραγματικά απαραίτητη για να ισχύει το συμπέρασμα.

6. Αν $1 \le p \le q \le \infty$ και X είναι μια ΤΜ δείξτε ότι

$$\|X\|_p \le \|X\|_q,$$

όπου $\|X\|_r = \left(\mathbb{E}\left[|X|^r\right]\right)^{1/r}$, για $r < \infty$, και $\|X\|_\infty = \text{esssup}|X|$.

7. (α) X είναι μια πραγματική ΤΜ σε ένα χώρο πιθανότητας. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$$

είναι καλώς ορισμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Αν η ΤΜ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ υπολογίστε τη συνάρτηση $\phi_X(t)$. (Ομοιόμορφα κατανεμημένη σημαίνει ότι η κατανομή μ_X είναι το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[a, b]$ και διαιρεμένο με το $b - a$.)

(γ) Αν $Y = X + a$, για κάποια σταθερά $a \in \mathbb{R}$, βρείτε την συνάρτηση $\phi_Y(t)$ μέσω της $\phi_X(t)$.

(δ) Αν $X_n(\omega) \to X(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει επίσης $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$.

8. Άσκηση 1.11 από [MU].

9. Άσκηση 1.12 από [MU].

10. Άσκηση 1.13 από [MU].